Anais da

7 Semana da Matemática

Matemática, inclusão e tecnologia

16 a 19 de maio de 2018

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus Vitória

(Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

Semana da matemática do Ifes (1., 2018 : Vitória, ES)

S471 Anais da 7º Semana da Matemática do Ifes Campus Vitória : matemática, inclusão e tecnologia [recurso eletrônico] / Claudia Alessandra Costa de Araújo Lorenzoni (Orgs.) ... [et al.]. – Vitória : PPGEH, 2016.

318 p. : il.

ISBN: 978-85-8263-369-4

Sistema requerido: visualizador de arquivo PDF.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática aplicada. 3. Educação inclusiva. 4. Tecnologia educacional. I. Lorenzoni, Claudia Alessandra Costa de Arújo. II. Instituto Federal do Espírito Santo. III. Título

CDD: 510.7

CLAUDIA ALESSANDRA COSTA DE ARAÚJO LORENZONI
DOUGLAS ARAUJO VICTOR
ELVIRA PADUA LOVATTE
GERALDO CLAUDIO BROETTO
JANIVALDO PACHECO CORDEIRO
LOURENÇO GONÇALVES JUNIOR
MARIA CLARA SCHUWARTZ FERREIRA
MICHEL GUERRA DE SOUZA
POLIANA DARÉ ZAMPIROLLI PIRES
SOLANGE TARANTO DE REIS
VITO RODRIGUES FRANZOSI
WALDILÉRIA SILVA VIANA
YGOR FRANZOTTI DE BARROS GOMES

Anais da 7ª Semana da Matemática do Ifes

Campus Vitória

Matemática, inclusão e tecnologia

1° Edição

VITÓRIA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO ESPÍRITO SANTO

2018

Apresentação

Na perspectiva de socializar e ampliar debates relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de matemática em suas diferentes nuances no Instituto Federal do Espírito Santo, a Coordenadoria de Matemática do Ifes, Campus Vitória, por meio de seus professores e em parceria com servidores de outros Campi, professores pesquisadores do Educimat e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Espírito Santo (SBEM-ES) e alunos da Licenciatura em Matemática do Campus Vitória promovem a **7ª *Semana da Matemática*** em maio de 2018.

A 7ª Semat tem como tema "*Matemática, inclusão e tecnologia*" que visa possibilitar a socialização do conhecimento construído em educação matemática e matemática aplicada por meio das experiências de sala de aula e pesquisas de professores, alunos e comunidade científica. A ideia é ter um evento que contemple a Educação matemática, Matemática pura e Matemática aplicada, envolvendo diferentes pessoas para discutir e estudar o fazer matemático no desenvolvimento e uso das tecnologias que auxilie na inclusão.

Os Anais da 7ª Semana da Matemática apresentam os trabalhos completos aprovados na 7ª Semana da Matemática, organizados em três modalidades: Comunicação Científica, Relato de Experiência e Feira de Matemática.

Comissão Organizadora.

Claudia Alessandra Costa de Araújo Lorenzoni
Douglas Araujo Victor
Elvira Padua Lovatte
Geraldo Claudio Broetto
Janivaldo Pacheco Cordeiro
Lourenço Gonçalves Junior
Maria Clara Schuwartz Ferreira
Michel Guerra de Souza
Poliana Daré Zampirolli Pires
Solange Taranto de Reis
Vito Rodrigues Franzosi
Waldiléria Silva Viana
Ygor Franzotti de Barros Gomes

PÁGINA DO EVENTO

http://ocs.ifes.edu.br/index.php/semat/7

PARECERISTAS

Adriana Padua Lovatte
Alex Jordane
Alexandre Krüger Zocolotti
André Vicente Salazar
Antônio Henrique Pinto
Bruna Zution Dalle Prane
Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni
Dilza Côco
Diogo Oliveira
Douglas Araújo Victor
Edmar Reis Thiengo
Elvira Padua Lovatte
Fernanda Cezana
Gelson Freire Azeredo
Geraldo Claudio Broetto
Hélio Rosetti Júnior
Janivaldo Pacheco Cordeiro
Lourenço Gonçalves
Luana de Oliveira Justo
Luciano Lessa Lorenzoni
Maria Clara Schuwartz Ferreira
Michel Guerra De Souza
Oscar Luiz Teixeira De Rezende
Poliana Daré Zampirolli Pires
Rony Cláudio de Oliveira Freitas
Sandra Aparecida Fraga Da Silva
Vânia Maria Pereira Santos-Wagner
Ygor Franzotti De Barros Gomes

SUMÁRIO

SUMÁRIO **6**

COMUNICAÇÕES CIENTÍFICAS **10**

AÇÕES COLABORATIVAS COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL ENVOLVENDO PADRÕES E GENERALIZAÇÕES NO ENSINO DA ÁLGEBRA 10

Maria Auxiliadora Vilela Paiva, Tatiana Bonomo Sousa 10

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MODELLUS COMO FERRAMENTA NO ESTUDO DE FUNÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO 23

João Luciano Araujo Viana 23

CAMPEONATO DE JOGO DE DARDOS: UMA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES 33

Fernando Campos Alves, Dilza Côco, Sandra Aparecida Fraga da Silva 33

DEDUÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA DOS LIVROS DIDÁTICOS 47

Leonardo Martins, Edmar Reis Thiengo 47

DESVENDANDO AS EXPRESSÕES "VAI UM" E "EMPRESTA UM", UTILIZADAS NOS ALGORITMOS DA SOMA E SUBTRAÇÃO, COM O APLICATIVO MULTIBASE 63

Vito Rodrigues Franzosi, Rony Cláudio de Oliveira Freitas 63

ENSINO DE FÍSICA E FUNÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UM ENVOLVIMENTO COMPLEXO 77

Geraldo Bull da Silva Junior, Jeferson Ney 77

ESTUDANTES COM AH/SD E O TALENTO LÓGICO-MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE PRÁTICAS DE VALORIZAÇÃO DO SEU POTENCIAL NO IFES 90

Isabelle Bueno, Edmar Reis Thiengo 90

JOGO DA ONÇA E SUAS VARIAÇÕES NA CULTURA INDÍGENA NO ESPÍRITO SANTO 111

Laira Lamburghini Ribeiro, Vanessa Carmo dos Santos, Claudia Alessandra Costa de Araújo, Lígia Arantes Sad 111

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA SOCIOCRÍTICA E REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: MEDINDO O CONSUMO DIÁRIO DE ÁGUA 119

Silvana Cocco Dalvi, Oscar Luiz Teixeira de Rezende 119

REVISITANDO PESQUISAS NA ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL SOBRE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL 129

Dayane Souza Gomes, Fabiany Cezário Dias Torezani, Dilza Côco, Sandra Aparecida Fraga da Silva 129

SABERES DE LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES EM UMA INTERVENÇÃO COM CARACTERÍSTICAS DE ENGENHARIA DIDÁTICA 140

Nelson Victor Lousada Cade, Maria Auxiliadora Vilela Paiva 140

FEIRA DE MATEMÁTICA 152

A TORRE DE HANÓI 152

Guilherme Nascimento de Oliveira, Raquel Perim Pereira, Gabriel Gandra Prata Gonçalves, Michel Guerra de Souza 152

CÁLCULO, RELATIVIDADE E UMA DAS FÓRMULAS MAIS FAMOSAS DA FÍSICA 162

Douglas Araujo Victor, Caio Angelo da Silva, Cesar Turczyn Campos 162

COMO GANHAR DINHEIRO COM PROBABILIDADE 180

Matheus Littig Radinz, Gabriela Provedel Dalla Bernardina, Matheus Murelli Rocha, Perseu Fernandes Machado de Oliveira, Thyago Vieira Piske, Douglas Araujo Victor, Michel Guerra de Souza 180

GPS E AVIÕES: REVOLUCIONANDO O RASTREAMENTO DO ESPAÇO AÉREO 189

Bianca Pina Bello, Emanuelle Ladaim Freire, Juliana Marcarini Carloni, Luísa Gonzaga Barcelos 189

JOGO EDUCATIVO USANDO O GEOPLANO PARA ENSINO DE GEOMETRIA PLANA 203

Daniel Redinz Mansur, Tayara Gomes da Cruz 203

NÚMERO DE EULER 212

Théo Borém Fabris, Arthur Gonçalves Diesel, Bruno Paiva Sant'Anna, Antônio Victor Machado de Oliveira, Gabriel Cosme Barbosa, João Victor Fernandes Picoli, Ramon Araújo Santana 212

RELATOS DE EXPERIÊNCIA 222

CONSIDERAÇÕES SOBRE UM CURSO DE CÁLCULO II MINISTRADO EM QUATRO SEMANAS 222

Guilherme Barbosa de Almeida, Ellen Kênia Fraga Coelho 222

CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INDÍGENA A PARTIR DE CONTEÚDOS VISUALIZADOS NA ARQUITETURA GUARANI 231

Kevila Cezario de Morais, Caio Angelo da Silva, Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni, Ligia Arantes Sad 231

DEDUÇÃO DA FÓRMULA DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO 246

Jéssica Alves Quintanilha, Mylane dos Santos Barreto, Janete Henrique Gomes, Daniela Dias Nogueira, Luiza Ferreira Costa, Tayná Monteiro Coelho de Freitas 246

DISCUTINDO OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS E NÃO POLIEDROS 257

Thaciane Jähring Schunk, Laira Lamburguini Ribeiro, Caroline da Silva Soares, Rodrigo Sena Silva 257

DO SUFOCO AO ALÍVIO: O PROJETO “DE OLHO NA ECONOMIA” AUXILIANDO NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DOS ALUNOS 267

Anderson José Silva 267

MONTANHAS CAPIXABAS: UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DE MOVIMENTO UNIFORME 282

Josiene Senhor da Silva 282

O JOGO DO MILHO QUEIMADO COMO METODOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA INDÍGENA 292

Laira Lamburghini Ribeiro, Cláudia Araujo Lorenzoni, Lígia Arantes Sad..... 292

O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL NO ESTUDO DE SÓLIDO ARQUIMEDIANO 300

Ranna de Jesus Ambrosio, Anna Carolline Pessoa de Mello Bitão, Lívia Azelman de Faria Abreu, Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues..... 300

O USO DO GEOGEBRA COMO RECURSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA: DESCOBRINDO A SEMELHANÇA DE FIGURAS 308

Gabriel Abreu Moreira, Felipe Avelino De Souza, Bruna Beraldo de Souza, Sandra Maria de Souza Silva, Ráira Graziela Manhães Carvalho, Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues, Vanice da Silva Freitas Vieira..... 308

UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO VIRTUAL PARA A APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO..... 318

Glaziela Vieira Frederich, Sandra Aparecida Fraga da Silva..... 318

COMUNICAÇÕES CIENTÍFICAS

AÇÕES COLABORATIVAS COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL ENVOLVENDO PADRÕES E GENERALIZAÇÕES NO ENSINO DA ÁLGEBRA

Maria Auxiliadora Vilela Paiva, Tatiana Bonomo Sousa

vilelapaiva@gmail.com

Resumo: Este artigo retrata parte de uma pesquisa vinculada à linha de formação de professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), ofertado pelo Centro de Formação e Educação à Distância do Instituto Federal do Espírito Santo (Cefor-Ifes). A pesquisa teve por objetivo investigar quais saberes os professores (re)constroem a respeito do conteúdo de padrões matemáticos e generalizações no ensino da Álgebra, em um curso de formação continuada por meio de ações colaborativas. Trata-se de um trabalho de natureza qualitativa, caracterizado como pesquisa do tipo intervenção pedagógica. Para o desenvolvimento da pesquisa, foi ofertado a professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do município de Cariacica–ES um curso semipresencial, com carga horária de 80h, intitulado: "Saberes Docentes de Álgebra". Os dados da pesquisa foram produzidos a partir deste curso de extensão utilizando questionários, observações decorrentes da interação com os participantes nas ações coletivas nos encontros presenciais e também nas interações no ambiente virtual de aprendizagem, o *moodle.* Neste curso tivemos a participação de vinte professores e foram abordados conceitos que envolvem padrões matemáticos, generalizações e seu ensino e aprendizagem. Para fundamentar esta pesquisa, foram utilizados os trabalhos de Shulman que propõe a base de conhecimento para o ensino; contribuições de Ball, Thames e Phelps sobre o conhecimento matemático para o ensino. Vários foram os saberes construídos pelos professores durante as interações no curso, ressaltando os de conteúdo e os pedagógicos do conteúdo. Pode-se afirmar que os professores conseguiram (re)construir os conhecimentos relativos ao conteúdo de padrões e generalizações, visto que conceitos relacionados a estes conteúdos e ideias subjacentes foram aperfeiçoados e aprimorados por eles. Os dados apontam que as discussões e reflexões coletivas e as trocas de experiência mobilizaram conhecimentos num processo histórico, cultural e individual de (re)construção de novos saberes.

Palavras-chave: Saberes Docentes. Álgebra. Padrões Matemáticos. Generalizações.

1. Introdução

É perceptível a ampliação, nesta última década, dos debates sobre formação de professores. É um tema que passa por constantes revisões e problematizações, especialmente por ser considerado elemento importante para a melhoria da qualidade da

educação. Somando-se a esta temática, várias são as pesquisas mostradas por Barqueiro (2016) que evidenciam a importância da presença de atividades de generalizações de padrões em todas as etapas da Educação Básica, uma vez que possibilitam a professores e alunos concepções variadas de Álgebra relacionando os diversos aspectos do pensamento algébrico. Surgem, a partir desses resultados, alguns questionamentos: Quais são as estratégias adotadas pelos professores ao iniciar conteúdos da Álgebra? Quais são os saberes desses profissionais sobre o conteúdo de padrões matemáticos e generalizações? Como o uso de padrões matemáticos e generalizações podem contribuir no desenvolvimento do pensamento algébrico? O que poderia ser feito para solucionar/amenizar as dificuldades do ensino e aprendizagem da Álgebra?

Dessa forma, com o intuito de buscar respostas e contribuir para mudanças no ensino e aprendizagem da Álgebra, este projeto foi desenvolvido com o objetivo de investigar quais saberes da docência, relacionados ao ensino de padrões e generalizações, os professores (re)constroem em um curso semipresencial de formação continuada por meio de ações colaborativas. Com a crença de que é no coletivo que os professores (re)constroem saberes para o ensino, buscou-se, por meio de questões disparadoras de aprendizagem, propiciar momentos de discussões e reflexões entre os participantes, tendo a prática dos professores cursistas como foco de saberes dinâmicos e emergentes.

Como forma de elucidar e teorizar os caminhos percorridos durante esta pesquisa, o capítulo seguinte trará a fundamentação teórica utilizada, apoiada nos estudos de Shulman (1986), que propõe a base de conhecimento para o ensino; nas contribuições de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento matemático para o ensino, além de teóricos da formação de professores na linha colaborativa e estudos sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra.

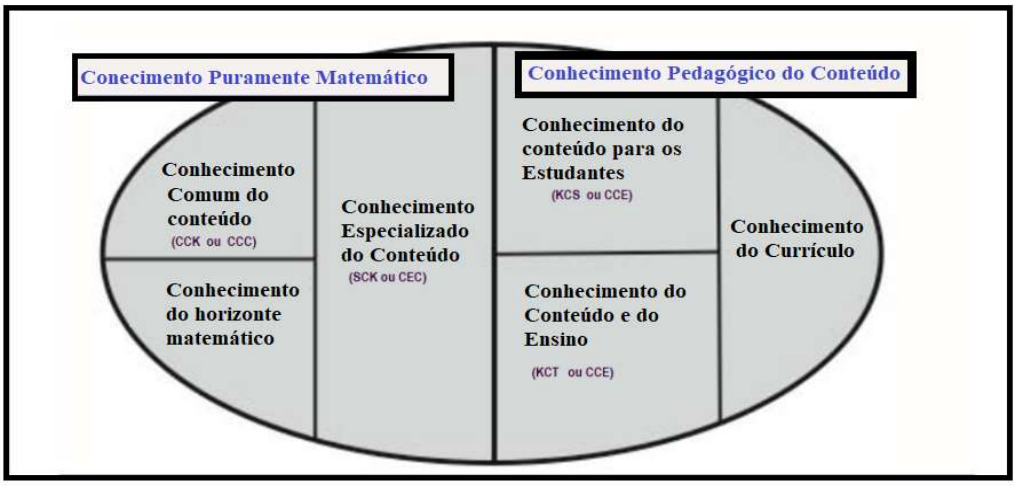
2.1 Conhecimento Matemático para o Ensino

Lee Shulman (1986) propõe a reflexão sobre a *base de conhecimentos para o ensino*. O autor investiga em suas pesquisas o conjunto de saberes, habilidades e compreensões que possibilitam ao professor exercer a função de ensinar. Para tal, ele apresenta, inicialmente, três categorias de conhecimento fundamentais e necessárias ao professor para o exercício de sua prática docente: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular.

O conhecimento pedagógico do conteúdo é considerado o conhecimento profissional específico de professores e surge a partir da compreensão do professor sobre o conteúdo a ser ensinado. Este conhecimento fornece ao professor ferramentas para transformar o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula em algo compreensível para os alunos. Com a mobilização desse conhecimento é possível diferenciar um professor de um especialista numa determinada área. O professor utiliza analogias, representações e explicações que podem facilitar a compreensão dos conteúdos específicos. Desse modo, requer que o professor saiba, por exemplo, analisar as produções dos alunos, verificar como esses se comunicam com essas produções e as dificuldades apresentadas pelos alunos nos diversos tópicos da matemática escolar.

Baseado nas ideias de Shulman, Ball, Thames e Phelps (2008) desenvolveram em suas pesquisas uma teoria sobre o conhecimento matemático para o ensino (MathematicalKnowledge for Teaching – MKT), tomando por base a prática dos professores. Esses autores, em seus estudos, juntamente com os professores participantes do projeto, observaram que existem aspectos que vão além do conhecimento pedagógico do conteúdo que precisam ser organizados, mapeados e incluídos nos cursos de matemática para professores. Um dos objetivos centrais do trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008) foi formular uma teoria baseada na prática, relacionada a conhecimentos matemáticos para o ensino. Assim, esses pesquisadores sugerem uma divisão em dois subdomínios do conhecimento matemático: conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento puramente matemático e os subdividem, como explicitam o quadro a seguir.

Figura1: Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: (BALL,THAMES,PHELPS,2008, p.403.)

Com base na divisão proposta por esses autores, notamos que dentro do conhecimento puramente matemático temos o que chamaram de "conhecimento especializado do conteúdo", ou seja, o conhecimento do conteúdo específico para o ensino. Este conhecimento é pautado na ideia de que o ensino requer do professor, um conhecimento que vai além do que está sendo efetivamente ensinado, como, por exemplo, ter clareza dos conceitos, objetivos e possíveis articulações do que se deseja alcançar com determinado conteúdo. "O conhecimento do conteúdo e do ensino" combinam o conhecimento sobre o ensinar e o conhecimento sobre matemática, expressados no momento que avaliam vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações e analisam as contribuições que diferentes métodos e procedimentos são utilizados para alcançar a aprendizagem de determinado conteúdo. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008) reconhecer uma resposta errada é um conhecimento comum do conteúdo, dimensionar a natureza de um erro é um conhecimento especializado do conteúdo.

As categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008) não são formadas por conjuntos disjuntos, considerando que uma mesma situação pode ser analisada em diferentes perspectivas. Em seus estudos, os autores concordam que os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar, porém o conhecimento do conteúdo por si só pode não ser suficiente para o ensino. Portanto, a ideia proposta originalmente por Shulman, e ampliada por Ball, Thames e Phelps, de que existe uma forma de conhecimento matemático específico para o ensino, traz avanços para a discussão sobre a formação de professores de matemática. Em particular, na formação continuada de professores que visa desenvolver conhecimentos para o ensino da Álgebra, mais especificamente sobre padrões matemáticos e generalizações.

2.2 Formação de Professores por meio de ações colaborativas

Lopes, Moura, Araújo e Cedro (2016) apresentam discussões acerca da formação docente e estudos que constituem indicadores teórico-metodológicos para o processo de aprendizagem docente centrado no modo de produção coletivo. Fundamentados nos pressupostos da pesquisa colaborativa, os autores apresentam contribuições de estudos orientados pela perspectiva histórico-cultural acerca do fenômeno formação docente e

organização do ensino de Matemática. Eles buscam indicar questões centrais que perpassam a relação entre trabalho coletivo e organização do ensino.

> Os processos formativos devem não somente possibilitar o reconhecimento e a compreensão das realidades laborais, históricas, culturais e sociais inerentes à prática do professor, mas possibilitar ao indivíduo transformá-las e exercer a condição de sujeito do seu conhecimento, na perspectiva do conhecimento para si e para os outros. (LOPES ET al, 2016, p.6)

Lopes et al (2016) consideram um modelo de formação que assume a aprendizagem como um processo social e que possui, como decorrência, a compreensão de que a interação entre os sujeitos envolvidos possui um papel crucial no seu desenvolvimento. Eles destacam que a qualidade da formação do professor está relacionada à forma como é organizada e nas oportunidades que o docente terá de compartilhar suas ações, ou seja, fortalecendo as interações e reflexões no grupo de professores. Apesar de termos ações isoladas e individuais é na troca com o outro que cada um dos envolvidos se apropria dos conhecimentos produzidos coletivamente.

Corroboramos com esse modelo de formação, com ênfase na colaboração e nas ações coletivas, com a crença de que é no coletivo que construímos os saberes necessários à docência. Entendemos, também, que as ações de uma formação estão ligadas ao desenvolvimento de conceitos matemáticos e a forma de articular o conhecimento científico e o escolar. Relataremos a seguir questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da Álgebra.

2.3 Ensino e Aprendizagem da Álgebra

Nos estudos de Miguel, Fiorentini e Miorim (1993) são descritas as mudanças da educação algébrica no Brasil, esses autores apontam que as concepções da Álgebra, construídas ao longo da história, possuíam como característica principal a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica, ou seja, o pensamento algébrico como um tipo de pensamento que pode se expressar por uma linguagem, por meio de uma linguagem aritmética, geométrica ou algébrica. Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), por outro lado, apontam que as investigações matemáticas podem ser realizadas por meio de atividades exploratório-investigativas propiciando aos alunos mobilizarem e desenvolverem aspectos do pensamento algébrico, como:

> Estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; Perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; Produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produzir vários significados para uma mesma expressão numérica; Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; Transformar uma expressão aritmética em outra mais simples; Desenvolver algum tipo de processo de generalização; Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias; Desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.(FIORENTINI, FERNANDES e CRISTÓVÃO, 2005, p.5).

Tomando como base os pressupostos teóricos, nossa definição de "pensamento algébrico" se caracteriza como a capacidade de analisar e estabelecer relações, de expressar ou explicar a estrutura de um problema, ou seja, construir um modelo matemático, generalizar essas relações, operar com o desconhecido como se fosse conhecido, ou seja, de forma analítica, produzindo significado para a linguagem e os objetos algébricos. Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) apontam que as atividades que envolvem generalizações de padrões matemáticos podem ser utilizadas como ferramenta para auxiliar os professores na identificação do desenvolvimento e caracterização do pensamento algébrico dos alunos.

Sendo assim, realçamos também os estudos de Mason (1996) que apresentam a generalização de padrões numéricos e geométricos com uma abordagem eficiente para a introdução à Álgebra. Em seu texto, ele dá tanta importância ao tema que descreve a generalização da seguinte forma a: "generalização é o batimento cardíaco da matemática" (MASON; 1996, p. 65, tradução nossa). Em consonância com o autor, consideramos que o estudo de padrões e generalizações possibilita, além da construção do pensamento algébrico, haja o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos.

A partir da construção dessa perspectiva, por meio do embasamento teórico utilizado, apresentaremos neste trabalho as discussões e reflexões de um dos encontros com os professores no qual utilizamos estudos sobre padrões matemáticos e generalizações.

3. O Caminho Percorrido...

Consideramos a formação continuada uma atividade colaborativa, na qual se busca o compartilhamento das discussões, reflexões e avaliações por meio do diálogo, na tentativa de contribuir para o desenvolvimento de saberes da docência. Esta pesquisa, na linha

qualitativa, possui características da pesquisa "intervenção pedagógica" Damiani (2012). Ela considera que este tipo de pesquisa se constitui por meio das

> [...] interferências (mudanças, inovações), propositadamente realizadas, por professores/pesquisadores, em suas práticas pedagógicas. Tais interferências são planejadas e implementadas com base em um determinado referencial teórico e objetivam promover avanços, melhorias, nessas práticas, além de pôr à prova tal referencial, contribuindo para o avanço do conhecimento sobre os processos de ensino/aprendizagem neles envolvidos (DAMIANI, 2012, p. 3).

Como o objetivo deste estudo é analisar os saberes docentes que afloram numa formação continuada ao refletirmos sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, oferecemos um curso numa perspectiva que valorizasse a interação e a reflexão, focando o estudo de padrões matemáticos e generalizações. Dessa forma, os dados da pesquisa foram produzidos por meio de questionários e observações decorrentes da interação com os participantes nas ações coletivas durante os encontros presenciais e também no ambiente virtual de aprendizagem, o *moodle,* nos quais se trabalhou o aprofundamento teórico sobre os temas trabalhados, a partir dos relatos de experiências e dos questionamentos e dificuldades dos professores/cursistas ao resolverem situações problema diversas.

Assim, com base em alguns questionamentos feitos aos participantes acerca de Álgebra e de como concebiam os processos de ensino e aprendizagem desse tema, nós trabalhamos com uma breve contextualização histórica de Álgebra. Utilizamos, neste primeiro momento, textos de Miguel, Fiorentini e Miorim (1993), alguns documentos legais que trazem a abordagem de Álgebra nos anos finais do ensino fundamental e os principais aspectos do pensamento algébrico apresentados por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Essa etapa foi seguida de discussões e reflexões coletivas com os professores participantes, relacionadas aos saberes de Álgebra que eles compartilhavam nas discussões e fóruns.

A partir dessa discussão, foram realizadas algumas atividades com a finalidade de durante a produção de dados, que denominaremos por suas características principais. Essas atividades serão analisadas nos capítulos subsequentes.

3.1 Generalizando padrões

Partindo de uma situação problema, apresentada a seguir, pudemos identificar os conhecimentos prévios dos participantes em relação a generalizações de padrões

matemáticos. Essa atividade foi aplicada individualmente a cada participante do curso e no momento coletivo as respostas foram compartilhadas, sendo que nós as apresentamos sem a devida identificação de quem a tinha redigido. Isso propiciou um ambiente no qual ocorreram discussões sobre o tema e reflexões a respeito da prática docente. Nesta atividade, os participantes tiveram que analisar a seguinte situação-problema:

Figura 2: Situação Problema para explorar a generalização de padrões matemáticos.

Na atividade abaixo foi solicitado aos alunos a generalização do padrão geométrico a partir da sequência de figuras. Professor faça uma breve análise das respostas apresentadas por cada aluno de acordo com sua prática em sala de aula?

Observe a sequência de figuras.
Escreva a expressão algébrica que determina o número de pontos de uma figura n?

1ª Fig 2ª Fig 3ª Fig

Aluno 1	Aluno 2
2n-1	2n+1
Aluno 3	**Aluno 4**
2 vezes o número da figura menos 1	2(n+1)-1

Fonte: Os Autores

Algumas inferências dos participantes foram transcritas a seguir, nas quais verificamos diferentes percepções.

> *Professora C- Alunos 2 e 4 estão corretos. Aluno 2, observou que em cada figura o número de pontos é o dobro da figura posicionada mais 1. Aluno 4, percebe-se que é um raciocino equivalente da forma apresentada pelo aluno 2. Os alunos 1 e 3 estão errados.*
>
> *Professor M- Os alunos 2 e 4 desenvolveram o mesmo raciocínio na composição da expressão algébrica, porém com formatações diferentes. [...] Os alunos 1 e 3, por sua vez aproximam-se em raciocínio, porém apresentam estruturas diferentes, [...]não concluem corretamente a quantidade de pontos da figura.*
>
> *Professor J- De acordo com as respostas apresentadas, os alunos 1 e 3, 2 e 4 deram as mesmas respostas utilizando linguagens diferentes e dependendo dos valores atribuídos a "n" as expressões são válidas e verdadeiras. (1º Encontro presencial, tarefa do questionário aplicado em 20/06/2017).*

Conforme as análises dos professores das respostas dos quatro alunos nesta situação-problema, verifica-se que não é suficiente dizer se está certo ou errado, não é suficiente o conhecimento comum do conteúdo apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008). Nas transcrições das falas dos professores, observamos indícios do "conhecimento comum do

conteúdo" e "conhecimento dos estudantes e do ensino", ao mostrarem evidências, em suas respostas, sobre o que os alunos poderiam pensar em relação à questão proposta e por que eles possivelmente se confundiram e tiveram dificuldade no momento da apropriação da linguagem algébrica.

Já o segundo encontro presencial foi marcado por um momento dedicado à discussão coletiva a partir das respostas apresentadas por esses três professores. Ao investigarem as respostas dos próprios colegas, os professores relataram que compreenderam a análise da professora "J" ao descrever que o erro dos alunos 1 e 3 pode estar ligado ao significado atribuído ao valor da variável "n" na expressão algébrica. Dessa forma, os professores refletiram sobre a discussão coletiva e acrescentaram que, possivelmente, o valor atribuído pelos alunos 1 e 3 a variável "n" pode ser o valor da próxima figura ou o número de pontos da linha horizontal.

As discussões coletivas sobre essa situação-problema apresentada na Figura 2 geraram questionamentos importantes para a construção de saberes da docência. Desses questionamentos, destacamos a discussão promovida pelos professores marcada pela fala da crença de que, na maioria das vezes, os alunos conseguem perceber a regularidade do padrão geométrico, porém sentem dificuldade de desenvolver algum processo de generalização por meio de uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressarem-se matematicamente. Observamos que o desenvolvimento dessa atividade propiciou avanço nas discussões sobre padrões geométricos e generalizações e sobre o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

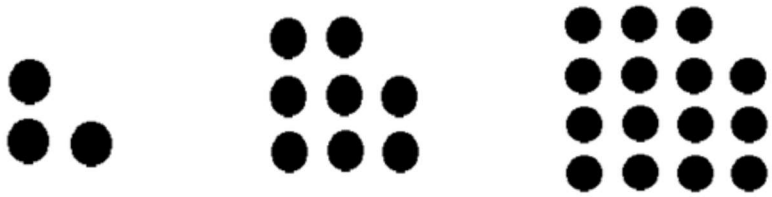
3.2 Ampliando as discussões sobre padrões e generalizações

O objetivo dessa atividade foi o desenvolvimento do pensamento algébrico ao aprofundar os conhecimentos sobre generalizações de padrões geométricos, numéricos, sequências, equações, a partir das discussões e reflexões geradas na resolução das situações problema propostas e pelo relato das práticas dos professores. Como já tínhamos realizado uma atividade semelhante no encontro anterior, buscou-se avançar nas discussões de modo que os participantes explicitassem os saberes de cunho teóricos, práticos e metodológicos.

Figura 3: Padrões e generalizações.

Situação Problema :

Observe a sequência de desenhos apresentada a seguir:



1ª Figura 2ª Figura 3ª Figura

a)Quantas bolinhas tem a 4ª figura dessa sequência? Descreva como procedeu para encontrar a resposta.

b)É possível estabelecer um padrão para tal sequência? Em caso afirmativo, que padrão é esse?

Fonte: Adaptado de Souza e Pataro (2008, p. 27)

O professor R e a professora K foram ao quadro e colocaram as soluções abaixo. Neste momento eles explicaram e discutiram suas ideias com os demais professores

Quadro 1: Soluções do Padrão da Sequência de Figuras

Solução 1	**Solução 2**
a) 24 bolinhas, parte do entendimento que a primeira figura se comporta na base 2 como (b^2 -1) a próxima figura terá base 3, segue o padrão conforme a base.	a) $4^2+4+4=24$ bolinhas,
b) Sendo "n" o valor posicional da figura em uma sequência ordenada, cujos números são naturais e diferentes de zero, define-se b a base da figura por n+1. Para determinar a quantidade de pontos da figura, fazemos b^2-1. Logo, $(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n$.	b) Observei a regularidade nas figuras, um quadrado no meio mais uma linha horizontal e vertical de mesmo número do lado do quadrado; $1^2+1+1=3$ generalizando x^2+x+x $2^2+2+2=8$ x^2+2x $3^2+3+3=15$

Fonte: Os Autores.

As discussões relacionadas a essa atividade se voltaram para o entendimento do valor atribuído à variável. No caso da solução 1, o professor explicou que o valor atribuído à variável "n" estava relacionado ao valor da posição da sequência de figuras apresentada

na tarefa. Então, para encontrar a quantidade de bolinhas, o professor disse que bastava efetuar b^2-1, sendo b=n+1. A solução 2, de acordo com o relato dos professores, é mais compreensível para os alunos, pois surge a partir da observação do padrão geométrico, havendo uma transformação para a linguagem aritmética antes de se obter a linguagem algébrica.

> Considero importante deixar o aluno expressar a regularidade por meio de uma linguagem mais natural, incentivar a desenvolver os casos particulares na representação numérica para que aos poucos consiga desenvolver a equação que representa o caso geral. (Professora J, 2° Encontro presencial em 04/07/2017).

Observamos, a partir do relato, que a professora em suas aulas incentiva os alunos das séries finais do Ensino Fundamental a observarem o padrão matemático, realizar suas comparações, expressar de forma aritmética, para depois desenvolverem algum tipo de generalização. Esses aspectos mostram indícios do conhecimento especializado do conteúdo, pois evidencia a percepção da professora em buscar desenvolver aspectos do pensamento algébrico, apontados por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Ao final das atividades desenvolvidas, os professores demonstraram e expressaram o sentimento de estarem mais preparados para ensinar Álgebra na escola básica. Comentaram isso, porque segundo eles, antes do curso, a Álgebra era vista de forma reduzida. Expressaram, também, que as discussões no grupo de formação lhes fizeram ver a importância do conteúdo de padrões e generalizações na formação do pensamento algébrico. Ademais, podemos perceber, nas discussões coletivas, que ocorreram aprendizagens e reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra. As trocas de experiências mobilizaram saberes que permitiram que uns colaborassem com os outros e possibilitou que ocorressem outras aprendizagens.

4. Considerações Finais

Organizar uma formação continuada que valorizasse o diálogo e as reflexões coletivas foi um desafio e nos deu a certeza de que este é o caminho para que mudanças ocorram durante a formação. Vários foram os saberes construídos pelos professores durante as interações no curso e ressaltamos os conhecimentos relacionados aos conteúdos da Álgebra e seu ensino e aprendizagem. Pode-se afirmar que os professores conseguiram, em sua maioria, (re)construir os conhecimentos relativos ao conteúdo de padrões e

generalizações, visto que conceitos relacionados a estes conteúdos e ideias subjacentes foram aperfeiçoados e aprimorados. Neste recorte apresentamos alguns poucos aspectos dessa (re)construção, mas em variados momentos da formação nos permitem reforçar nossas constatações de que mudanças substanciais ocorreram.

Os dados apontam que as discussões e reflexões coletivas e as trocas de experiências mobilizaram conhecimentos relacionados ao contexto escolar, às práticas de sala de aula e às formações desses professores, o que nos permite dizer que a formação se deu num processo histórico, cultural e individual de (re)construção de novos saberes. Desse modo, o trabalho reflexivo e as ações colaborativas, desenvolvidas durante os momentos da formação, a partir da resolução de atividades seguida de discussões e reflexões, permitiram repensar a prática pedagógica de forma individual e coletiva. A formação propiciou a (re)construção dos saberes docentes a partir da compreensão dos professores sobre o pensamento algébrico, buscando romper com uma prática tradicional de ensino que privilegia somente a manipulação das letras.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389 - 407 nov./dez. 2008.

BARQUEIRO, G. **Achados sobre generalização de padrões ao "garimpar" pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013)**. 2016. 229f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DAMIANI. M.F; **Sobre Pesquisas do Tipo Intervenção.** Pesquisa Intervenção. XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, UNICAMP, Campinas, 2012.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.L.P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULOE NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, Lisboa, 2005.

LOPES, A. R. et al. **Trabalho coletivo e organização do ensino de matemática**: princípios e práticas. Zetetike, Campinas, São Paulo, 2016. v. 24, n. 1, p. 13-28.

MASON, J**. Expressing generality and roots of algebra**. In: BEDNARZ, N; KIERAN, C; LEE, L. (Eds.). Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Contribuição para um repensar...educação algébrica elementar**. São Paulo,1993, v.4, n1, p.78-91.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**.1986, p.4-14, v.15.

SOUZA, J; Pataro, P.; **Vontade de saber matemática**, Nova Ortografia, 3 ed. Editora FTD. 2008.

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MODELLUS COMO FERRAMENTA NO ESTUDO DE FUNÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

João Luciano Araujo Viana

jl.venancio98@gmail.com

Resumo: Pretende-se neste trabalho apresentar uma proposta didática da utilização do Software de ensino Modellus na interdisciplinaridade da matemática com a física, embasando-se na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, de forma a constituir uma proposta didática da utilização do Software na análise de fenômenos físicos de modelagem matemática adequada para o Ensino Médio. No que se diz respeito ao software, o presente trabalho apresenta-se direcionado ao ensino e análise do estudo de funções, considerando para tal as aplicações das ferramentas matemáticas no cotidiano e integrando com os avanços tecnológicos diretamente ou indiretamente ligadas ao cotidiano dos alunos, de modo a apresentar-se como uma ferramenta impulsionadora da interatividade e agilidade na busca do saber científico (ANDRADE, 2016, p.17). Partindo da ideia que a instituição tem por objetivo a construção do intelecto social e científico dos indivíduos torna-se necessário a utilização de ferramentas tecnológicas em paralelo a metodologias de ensino aplicadas no conhecimento científico, em especial as ferramentas matemáticas, seja elas no ambiente escolar ou no dia a dia do aluno, como meio de transformação objetivando a resolução de problemas. Com as crescentes discussões que englobam a reestruturação do sistema e métodos de ensino, especialmente nas áreas da ciência da natureza, procurou-se desenvolver juntamente ao NEEF- Núcleo de Estruturação do Ensino de Física, IFES-Cariacica, diversos trabalhos com o objetivo de diversificar o ensino de física e modelagem matemática. O trabalho que será apresentado vem propor uma ferramenta muito utilizada no ensino da física, que originou-se em Portugal com intuito de acrescentar às salas de aula um ambiente de livre modelagem matemática tendo como resposta uma interface simples e didática, sem a necessidade da utilização de linguagens de programação ou conhecimentos específicos de difícil acesso a alunos do Ensino Médio. Segundo os PCN's, (p. 62/63), "É importante que estimule os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática[...]" (PCN's,p. 62/63 Apud Santos,2007,p.27), logo o software Modellus apresenta-se como uma ferramenta abrangente no contexto das aplicações e modelagens matemáticas, visando sempre o pleno desenvolvimento do processo de ensino - aprendizagem vinculado aos fenômenos físicos do seu cotidiano, seja estes intuitivos ou não.

Palavras Chaves: Modellus; Modelagem Matemática; Física; Matemática.

1. Introdução

É notório que as novas tecnologias se integram gradualmente ao cotidiano, em especial nas novas gerações, de forma a encontramos na infância a concretização da alfabetização tecnológica antes mesmo da plena alfabetização linguística. Fato este que interfere

consideravelmente nas concepções e interações sociais dos indivíduos, quando levamos esta novidade para o campo educacional, nos deparamos com uma grande adversidade, a falta de preparo das instituições públicas de ensino para a utilização e auto adaptação diante as realidades tecnológicas. Em especial no Espírito Santo é comum vivenciar em escolas das redes públicas, a falta de harmonia destas tecnologias com a sala de aula, exceto em casos especiais no qual tem se inserido aos poucos novas ferramentas, entretanto mesmo nesses casos as adaptações e preparações dos profissionais e dos estudantes ainda é precário.

Trazendo a discussão para o ensino de matemática, nos contrapomos novamente as mudanças sociais, mesmo com diversos programas universitários, intervenções na formação dos educadores, ainda existe uma barreira da teoria com a prática. O profissional recém-formado ao se inserir em sala de aula depara-se diante de diversas ferramentas apresentadas em sua formação, entretanto o uso destas na escola se retarda por falta de estrutura física. Por outro lado, a modelagem matemática tem se apresentado pela academia como uma ferramenta que possibilita a sua aplicação com poucos recursos, segundo Bassanezi (2004),

> "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". (Bassanezi, 2004, p.24)

No entanto, são raras as oportunidades que um aluno do ensino básico tem de trabalhar e aprender esta abordagem do ensino de matemática enquanto está no ensino básico. Fato este que tem se tornado um problema, vista a crescente necessidade de abordar o cotidiano e o mundo com um olhar crítico e investigativo, proporcionando ao aluno um preparo mais eficaz no seu futuro e o futuro do país, pois assim como aponta a avaliação feito pelo GII (Global Innovation Index – Índice Global de Inovação), o Brasil registra o pior desempenho em inovação tecnológica entre os países em desenvolvimento. Como mostra o estudo realizado pelo GII, o Brasil tem enfrentado graves dificuldades para se desenvolver tecnologicamente, causado por diversos fatores, como má administração, baixos investimentos, e o pior de todos, reflexo de um passado onde a educação lhes preparou para este tipo de atuação na sociedade, atuando de forma mecânica sem reflexão da vivência e do mundo a sua volta.

Um dos graves problemas encontrados que contribuem consideravelmente para o baixo nível de desenvolvimento de uma consciência crítica na área de exatas é justamente a falta de procedimentos pedagógicos que proporcionem isso, tanto das disciplinas de física quanto a matemática, carecem destes métodos, onde uma proporciona ao desenvolvimento não só de contas mecânicas, mas sim o desenvolvimento de conceitos.

De acordo com PARRA (1993, p. 11):

> O mundo atual é rapidamente mutável, a escola como os educadores devem estar em contínuo estado de alerta para adaptar-se ao ensino, seja em conteúdos como a metodologia, a evolução dessas mudanças que afetam tantas condições materiais de vida como do espírito com que os indivíduos se adaptam a tais mudanças. Em caso contrário, se a escola e os educadores descuidarem e se manterem estáticos ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se sintam pouco atraída pelas atividades de aula e busquem adquirir por meio de uma educação informal os conhecimentos que consideram necessários para compreender a sua maneira no mundo externo. (Apud, SANTOS, 2007, p.14).

2. Metodologia

Esta proposta tem como base uma pesquisa teórica, visando alcançar os objetivos propostos. A princípio ocorreu uma revisão bibliográfica para descrever teorias que abordam as metodologias de ensino que utilizam softwares Modellus como ferramenta, paralelamente levantou-se uma recapitulação dos conceitos de ensino a partir das temáticas abordadas pelo autor David Ausubel. Em um segundo momento serão desenvolvidos analisadas propostas de com simulações disponibilizadas em sites e blogs. A terceira etapa se inicia com análise de aplicações anteriores desenvolvida pelo NEEF, em conjunto com entrevistas a professores que frequentemente utilizam o software em sala de aula, com o objetivo de verificar os resultados alcançados pelos educadores. Por fim ocorreu a elaboração e sistematização do estudo em forma de dados organizados e artigo.

3. Aspectos Teóricos e Metodológicos

Modellus é um software com ampla aplicação tanto em ensino quanto pesquisas acadêmicas, no qual visa desenvolver simulações com funções de modelagem matemática. Segundo Andrade (2009), as principais funções do software Modellus é:

- Realizar cálculos numéricos baseados em equações e dados especificados pelo usuário;

- Apresentar os resultados na forma de gráficos e tabelas;
- Facultar a montagem de animações;
- Fazer medidas de distâncias e ângulos sobre uma imagem.

(Andrade, 2009)

Devido a crescente necessidade de utilizar novos meios de ensino, Pastana (2017) sucinta as possibilidades provenientes ao uso dos softwares no ensino que segundo ele,

> Além de permitirem o estudo de problemas mais complexos, que necessitam de um conhecimento aprofundado de Matemática, esses softwares educacionais facilitam a visualização do fenômeno e o aproximam da prática educacional de Matemática e Física. Existe até hoje, geralmente nessa prática, uma preocupação em ensinar fórmulas, leis e conceitos, sem levar em consideração a apreensão dos conceitos dos assuntos, tendo em vista que o processo de ensino está centralizado no próprio conteúdo, sem aplicabilidade na vida do educando. (Pastana, 2017, p.16)

Em relação à Matemática, uma característica marcante no período de escolarização é o início da abstração de conceitos aprendidos em ciclos anteriores que, muitas vezes, não foram bem assimilados, tal ocorrido pode distanciar-se na realidade do aluno e provocar o desinteresse na matéria, de acordo com Sadovsky (2007, p.8):

> [...] a Matemática, não só no Brasil, é apresentada sem vínculos com os problemas que fazem sentido na vida das crianças e dos adolescentes. Os aspectos mais interessantes da disciplina, como resolver problemas, discutir idéias, checar informações e ser desafiado, são pouco explorados na escola. O ensino se resume a regras mecânicas que ninguém sabe, nem o professor, para que servem. (Apud, Roque. p.5)

Já David Ausubel, apresenta essa falta de interesse dos alunos em relação aos conteúdos devido aos processos educacionais deficientes de suas principais características de aprendizagem significativa, no qual são: Ampliar e Reconfigurar as ideias já existentes no indivíduo. Entretanto devemos ressaltar a existência de duas condições para que possa haver a aprendizagem significativa. Em primeiro lugar, o indivíduo necessita apresentar uma disposição para se abrir ao conhecimento: "se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica" (Pelizzari, 2002). Em segundo, conhecimento encontrado em sala de aula tem que ser potencialmente

significativo, sendo assim uma possível análise sobre o ensino da matemática a partir da interdisciplinaridade, principalmente com a física e fenômenos de cinemática, que estão presentes no cotidiano de qualquer indivíduo.

Análise dos fenômenos:

Um grande desafio para os professores na realidade brasileira, principalmente das escolas públicas, refere-se ao tempo para o preparo das atividades, dentro deste escasso tempo, podemos problematizar a inviabilização da utilização de muitos softwares de modelagem matemática justamente pela falta desse tempo, logo a utilização de simulações prontas disponibilizadas em sites, blogs e canais no site YouTube tem se mostrado viável para o uso em sala de aula, abaixo será apresentado um exemplo de simulação no software Modellus, disponibilizado no site *neefcaifes.wixsite.com* .

4. Movimento Retilíneo Uniforme - M.R.U:

Podemos formular o M.R.U como sendo o deslocamento de corpos com velocidade constante no decorrer de uma trajetória retilínea, quando nos referimos a uniforme indicamos que o valor da velocidade permanece constante, ou seja, o evento não teve modificações em relação à aceleração.

Em linhas gerais este tipo de movimento pode ser simplificado pelas equações a seguir,

Equação da Velocidade (Eq.1)	Vm= (Sf-Si) / (Tf-Ti)
Equação da Posição (Eq.2)	Sf=Si+Vm. (Tf-Ti)

Tabela 1 - Equações do M.R.U

Onde, Vm= Velocidade média; Sf= Posição final do corpo; Si= Posição inicial do corpo; Tf= Tempo Final; Ti= Tempo Inicial.

Provido destes dados, cabe neste instante uma análise matemática das fórmulas apresentadas, identificando os termos e sistematizando suas funções.

$$Vm= (Sf-Si) / (Tf-Ti)$$

Nota-se que a função acima apresenta características de uma função Racional, onde Tf-Ti comporta como um polinômio em função do tempo contido em intervalo, vale evidenciar que o termo Ti sempre é constante, já que quaisquer fenômenos iniciam em um tempo definido, mas o termo Tf pode variar durante o fenômeno.

Já a equação da posição (Eq.2) pode ser definida matematicamente como uma função afim, ou função polinomial do primeiro Grau, onde caracteriza-se por descrever um gráfico em formato de reta. Justamente com essa equação que será desenvolvido um exemplo da sequência didática aqui estudada, como base usaremos a simulação "Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)", desenvolvido pelo NEEF e disponibilizado no site do mesmo.

Na simulação nos deparamos com o seguinte problema:

(Mackenzie - SP)

Um automóvel descreve um movimento uniforme cuja função horária é s = - 2 + 5t. Para s em metros e t em segundos. Nesse caso, podemos afirmar que a velocidade escalar do automóvel é:

a) - 2 m/s e o movimento é retrógrado.

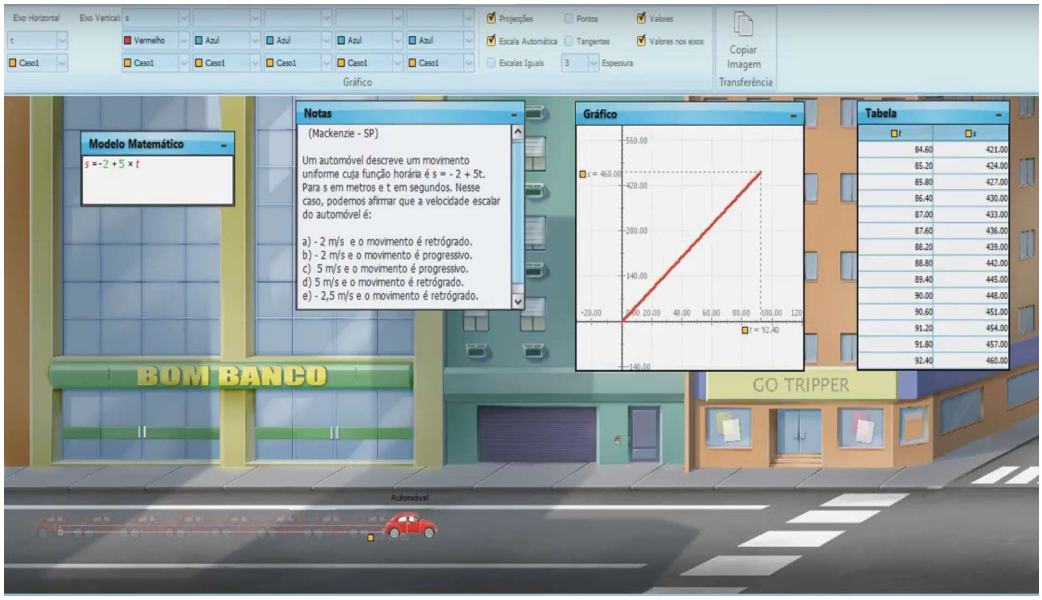
b) - 2 m/s e o movimento é progressivo.

c) 5 m/s e o movimento é progressivo.

d) 5 m/s e o movimento é retrógrado.

e) - 2,5 m/s e o movimento é retrógrado.

Figura 1: Simulação “Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)



Fonte: Os autores.

Segundo o enunciado temos a seguinte equação horária da posição, ou função da posição em relação ao tempo, s = - 2 + 5t, que descreve um padrão retilíneo nas relações numéricas dos membros, entretanto reduzir a esta simulação apenas a uma questão seria uma minimização dos recursos e das ferramentas desenvolvidas neste trabalho. Evidentemente que nas concepções tradicionais do ensino de física, cabe a esta simulação somente o papel de objeto materializador da questão, entretanto considerando a escola como meio de transformação pessoal e consequentemente social, humanizador e mecanismo essencial para a manutenção e renovação social, cabe a todos indivíduos o pleno desenvolvimento em conjunto, neste caso específico cabe ao professor de física administrar os conteúdos muito além de sua área de atuação, abrir as barreiras que dividem a escola em “blocos conteudistas” e contextualizar as ciências desenvolvidas com o mundo real e os interesses sociais. Assim como também cabe ao professor de física ir além do seu conteúdo contextualizando com o mundo e outras disciplinas, cabe também ao professor de matemática ultrapassar com essa barreira, um exemplo de rompimento é a utilização desta mesma simulação como meio contextualizador, abordando questões matemáticas e explanando as ferramentas no cotidiano, como por exemplo o levantamento das seguintes questões:

- Qual o domínio da função?

- Qual a imagem da Função?
- Qual o resultado obtido fisicamente e matematicamente quando se modifica o coeficiente angular? E o linear?

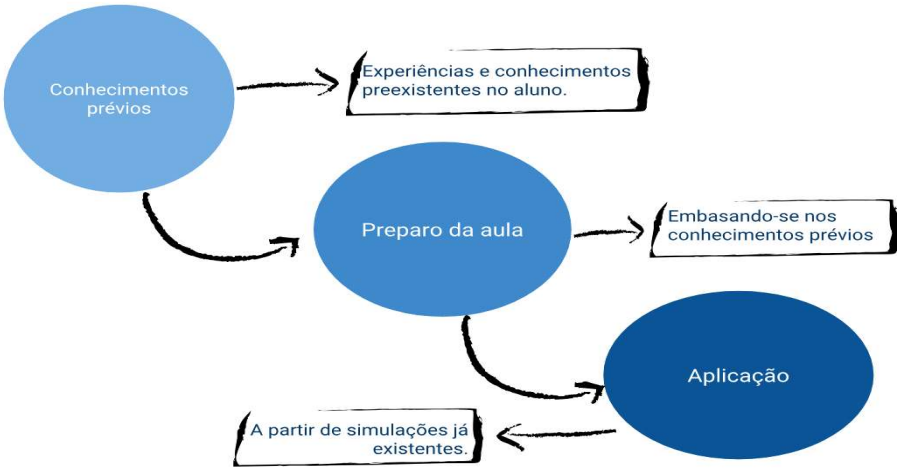
Entretanto para abordar tais questões o professor deve estar muito bem equipado de teorias da aprendizagem, neste artigo levantamos este caso baseando-se na teoria de David Ausubel que de acordo com suas concepções, a aprendizagem significativa ocorre quando um indivíduo consegue relacionar, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a nova informação com uma estrutura de conhecimento específica que faz parte integrante da sua estrutura cognitiva prévia (VALADARES, 2011).

Seguindo esta linha de pensamento, Ausubel mostra que a aprendizagem só vale a pena para o aluno se este consegue reconfigurar e ampliar o ensino que recebeu. O estudante sempre chega à sala de aula com algum conhecimento prévio, e o professor deve considerar essa realidade, a fim de que se reconfigure e amplie a instrução já existente com informações que o professor, os livros ou o contexto social possa fornecer, e nesse caso a utilização de simulações computacionais.

Para o autor, é ideal que o aluno receba, no início da aula, uma questão a ser resolvida, pois quando existe dúvida e motivação a partir de um questionamento, acontece uma mobilidade na aprendizagem, o que conduz o estudante à formulação de uma tese, que pode ser verdadeira ou não. A partir desse momento, o professor traz informações adicionais para que o aluno, com aquilo que conseguiu estruturar e aquilo que recebeu, possa fazer novas ampliações ou novas reconfigurações sobre o que havia sintetizado e verificar se sua proposição é pertinente.

A aprendizagem significativa, segundo PELIZZARI et al. (2002), possui notáveis vantagens, tanto do ponto de vista do enriquecimento da estrutura cognitiva do aluno como do ponto de vista da lembrança posterior e da utilização para experimentar novas aprendizagens, fatores que a delimitam como sendo o método educativo mais adequado para ser promovido entre os alunos. Cabe, portanto, ao espaço educacional, na função de gerenciar o ensino, manter acesa a motivação do estudante, que não perderia tempo em sala de aula, não se tornaria indisciplinado e sobretudo não perderia a incitação para aprender. Em síntese apresentaremos a figura abaixo como resumo:

Figura 2: Síntese da teoria de Ausubel.



Fonte: Os autores.

Resultados Finais

Diante da complexibilidade da inserção de novas tecnologias em salas de aula, e as adversidades diante as quebras de paradigmas, vê-se necessário a ampla discussão destas problemáticas não somente em pequenos artigos e trabalhos individuais, mas sim em salas de aulas de futuros professores, em seminários e principalmente nas salas dos professores dentro das instituições de ensino. Convivemos em uma sociedade que reflete os conceitos e resultados do capitalismo a uma crescente necessidade de integração dos conhecimentos, logo não existem mais sentido abordamos os conteúdos e disciplinas solitariamente, tanto a matemática quanto a física. Entretanto para isso os profissionais da educação devem estar embasados em teorias educacionais bem estruturadas, e evitarem a permanência a longo prazo em apenas uma linha de pensamento.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Marcelo Esteves. Simulações e modelagem computacional com o Software Modellus.1º Edição. Livraria da Física, 2016.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. Modelagem em Educação Matemática - 1ª Edição. Autentica, 2011.

MARTINS, Fabio. Brasil registra o pior desempenho em inovação entre os países em desenvolvimento. Sesi.20??.

PASTANA, Claudionor de Oliveira. A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MODELLUS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES.CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS. Dissertação de Mestrado UNIVATES. Lajeado, 2017.

ROQUE, Carla Cristina Escorsin. Modelagem Matemática no ensino fundamental.

SANTOS, Josiel Almeida. Dificuldades na Aprendizagem de Matemática. São Paulo, 2007.

PASTANA, Claudionor de Oliveira. A integração do ensino de funções trigonométricas e movimento harmônico simples por meio do software Modellus. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 1, e1402 (2018).

GONÇALVES, André Luiz. UM ESTUDO SOBRE A IMPORTÂNCIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO. FACULDADE ALFREDO NASSER INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, APARECIDA DE GOIÂNIA 2010.

MELO, Ruth Brito de Figueiredo. O software Modellus e suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem do movimento retilíneo uniforme e do movimento retilíneo uniforme variado. Educ.&Tecnol. Vol. 17, Nº 2, p.58-68, mai./ago. 2012.

CAMPEONATO DE JOGO DE DARDOS: UMA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES

Fernando Campos Alves, Dilza Côco, Sandra Aparecida Fraga da Silva

fernandocamposalves@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho faz parte da pesquisa de mestrado desenvolvida com estudantes em turma da Educação de Jovens e Adultos (EJA), da rede municipal de Vitória/ES. Refere-se a dados produzidos a partir de atividade denominada jogo de dardos. Essa ação teve coerência com atividade orientadora de ensino (AOE) ao ser apresentada por meio de um jogo e realizada de forma coletiva com os estudantes (MOURA, 2016). As regras iniciais do jogo de dardos (altura do alvo: 1,73 metros e a distância do alvo para o lançador: 2,37 metros) foram definidas após consulta à Internet. Com a participação dos estudantes essas posições foram marcadas com o auxílio de uma trena metálica e definida a pontuação: faixa circular amarela do alvo valia 10 pontos, dardo nessa região deveria multiplicar por 2; faixa dividida em quatro setores, dois na cor vermelha (valia 50 pontos) e dois na cor branca (valia 30 pontos), dardo nesses setores deveria multiplicar por 3; parte central do alvo ("mosca"), na cor preta valia 100 pontos; dardo que não acertasse o alvo ocasionaria a perda de 5 pontos. As instruções foram desenhadas/escritas no quadro da sala. Foram formadas quatro duplas e a ordem de lançamento definida. A competição teve quatro rodadas, alternando-se a cada rodada, o lançador e anotador de pontos de cada dupla. O registro de cada dupla foi apresentado para os demais estudantes no quadro, logo após o término do lançamento de seus dardos – os cálculos eram realizados e o resultado com a pontuação final conferido por todos. Ao término da competição os estudantes responderam três perguntas: O que vocês acharam da atividade? Alguma dificuldade (Qual ou quais?)? O que foi trabalhado de Matemática na atividade? Após as respostas os estudantes fizeram uma tarefa proposta por nós referente a um campeonato de jogo de dardos, no qual um dos participantes esqueceu de registrar o valor de uma das partes do alvo, mas anotou a pontuação final de cada jogador. As duplas deveriam descobrir o valor da região do alvo e escrever a expressão algébrica correspondente a cada situação. Essa sequência de ações teve por objetivo criar condições significativas para o ensino de equações, porém notamos que em seu desenvolvimento outras necessidades surgiram para os estudantes como a utilização da linguagem matemática para exposição (oral e escrita) dos resultados do jogo e organização em grupo para a realização do jogo. Entendemos que uma tarefa de ensino desse tipo pode ser considerada como atividade, pois mobiliza o interesse dos estudantes e promove diferentes aprendizagens. Ou seja, na realização de uma determinada ação é possível desencadear outras ações em seu processo (LEONTIEV, 1978). Concluímos que os alunos conseguiram se envolver na proposta e perceber a necessidade da escrita algébrica de equação.

Palavras Chaves: Matemática. Equação. EJA. Situação desencadeadora de aprendizagem.

1. Introdução

Este trabalho faz parte da pesquisa de mestrado desenvolvida com estudantes em turma da Educação de Jovens e Adultos (EJA), da rede municipal de Vitória/ES. Refere-se a

dados produzidos a partir de atividade denominada jogo de dardos. Essa ação teve coerência com a atividade orientadora de ensino (AOE) ao ser apresentada por meio de um jogo e realizada de forma coletiva com os estudantes. O jogo é uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) (MOURA, 2016). Esta atividade foi realizada por CEDRO (2004) com estudantes do ensino fundamental para propiciar situações que oferecessem o surgimento da necessidade da utilização de equações. Nosso intuito foi de verificar se a atividade necessitaria de alguma adaptação quando aplicada em uma turma da EJA no período noturno. A atividade foi denominada por CEDRO (2004) de JOGO DE DARDOS. Nossa pesquisa fundamentou-se ainda na Abordagem Histórico Cultural e na Teoria da Atividade.

2. Jogo de Dardos – Situação Desencadeadora de Aprendizagem

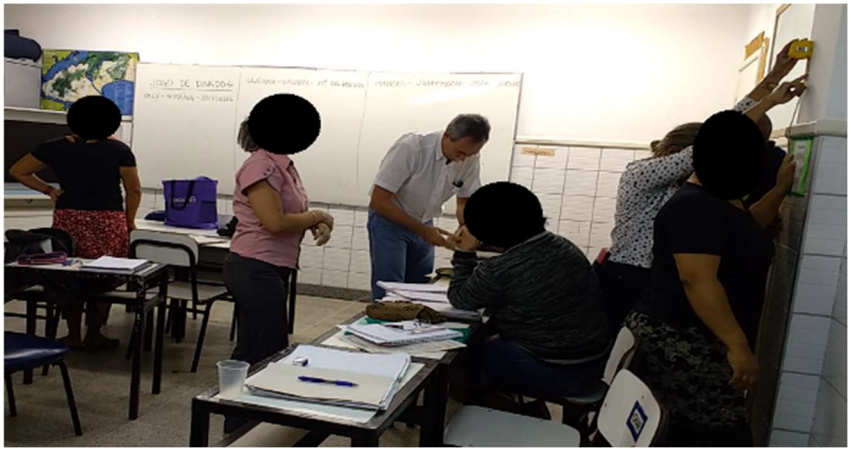
O jogo de dardos não é um jogo popular entre os estudantes de nossa escola e para desencadear a atividade adquirimos um jogo de dardos em uma loja de brinquedos. Preocupados ainda com a segurança dos envolvidos na atividade optamos pela compra de um jogo cujos dardos não tinham pontas metálicas afiadas, mas pontas metálicas emborrachadas que se encaixam nos pinos plásticos do alvo. Segurança garantida, iniciamos as interações com os estudantes da EJA no turno noturno, em sala de aula conversando sobre o jogo de dardos a partir de algumas questões: quem conhecia? Quem já tinha jogado? Todos os presentes conheciam (tinham visto em filmes), mas apenas um já havia jogado e com dardos com imãs em suas pontas. Desconheciam ainda as regras desse tipo de jogo. Falamos então que naquela noite faríamos um pequeno campeonato de JOGO DE DARDOS com duplas (lançador e anotador de pontos). Mostramos o material (alvo e quatro dardos sem ponta, figura 1) aos estudantes. As regras iniciais foram apresentadas: a altura do alvo e a distância, em relação ao alvo, para o posicionamento dos lançadores. Para a fixação do alvo em uma parede da sala de aula foi utilizada fita adesiva transparente no verso do mesmo e a sua altura foi definida pelos estudantes com o auxílio de uma trena (1,73 metros do piso até o centro da mosca do alvo, figura 2). A distância dos lançadores (2,37 metros, figura 3) foi marcada a partir da parede de fixação do alvo com uma linha vermelha no piso. Inicialmente os estudantes lançaram os dardos livremente para se familiarizarem com o seu manejo. Após alguns minutos informamos que iríamos começar a jogar e os estudantes se organizaram em duplas por

afinidade, sendo definido que um estudante seria o lançador e o outro faria o registro dos pontos obtidos em uma folha de caderno.

Figura 2: Material do Jogo.

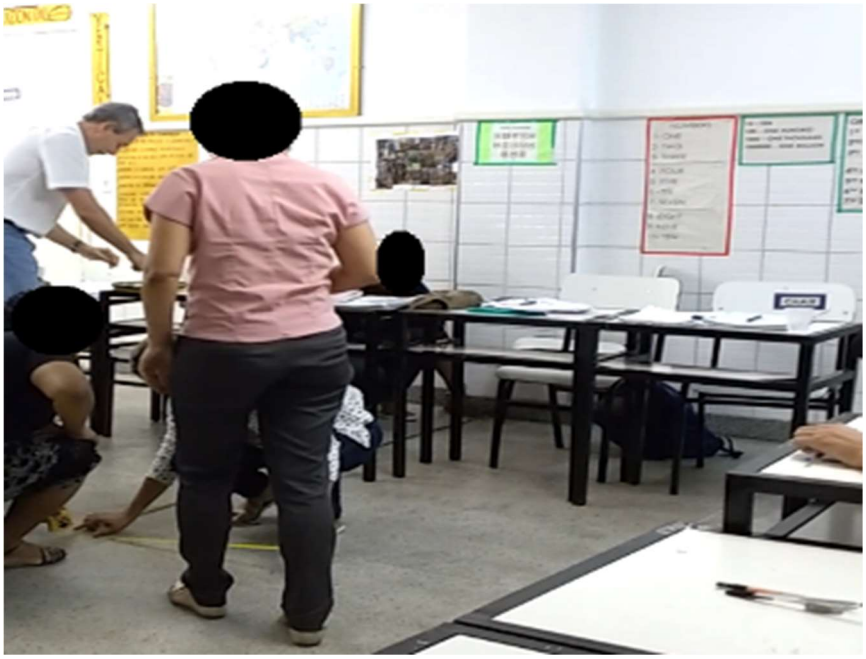
Fonte: Os autores.

Figura 2: Marcação com trena da altura do alvo na parede (1,73 m).



Fonte: Os autores.

Figura 3: Marcação com trena e fita da linha limite de lançamento no piso. (2,37m)

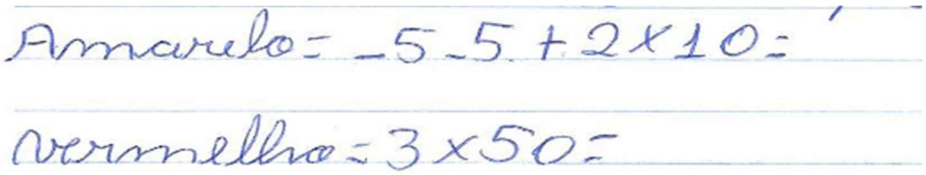


Fonte: Os autores.

Como seria a pontuação? A primeira faixa circular (na cor amarela) do alvo valeria 10 pontos e quem acertasse um dardo nessa região deveria multiplicar por 2; a segunda faixa era dividida em quatro setores, dois na cor vermelha e valia 50 pontos e dois na cor branca e valia 30 pontos, quem acertasse um dardo em um desses setores deveria multiplicar por 3; e por último a região da "mosca", na parte central do alvo, na cor preta e que valeria 100 pontos). O dardo que não acertasse o alvo e/ou caísse no chão ocasionaria a perda de 5 pontos para a dupla.

Essas instruções foram desenhadas e escritas no quadro branco da sala. A ordem de lançamento das duplas foi definida pela maior pontuação alcançada por meio do lançamento de um único dardo por um dos estudantes de cada dupla. Definida as duplas e a ordem de lançamento iniciamos a competição com quatro rodadas de lançamento, alternando a cada rodada, o lançador e o anotador de pontos de cada dupla. O registro de cada dupla era apresentado para os demais estudantes no quadro branco da sala de aula logo após o término do lançamento de seus dardos – os cálculos eram realizados e o resultado com a pontuação final conferido por todos. Apresentamos alguns registros dessa primeira competição:

Figura 4: 1º registro da dupla I/W.

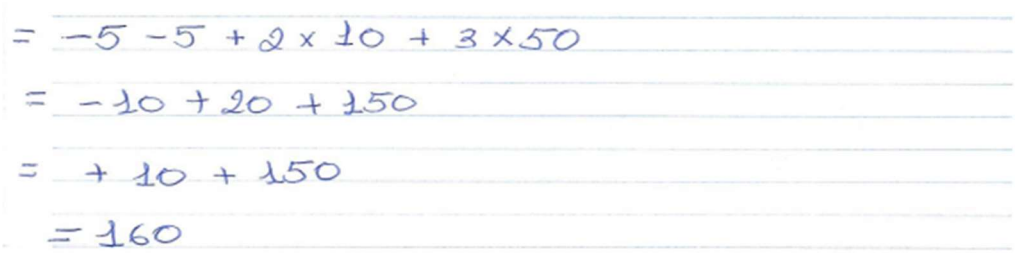


Fonte: Os autores.

Figura 5: 2º registro da dupla I/W.5

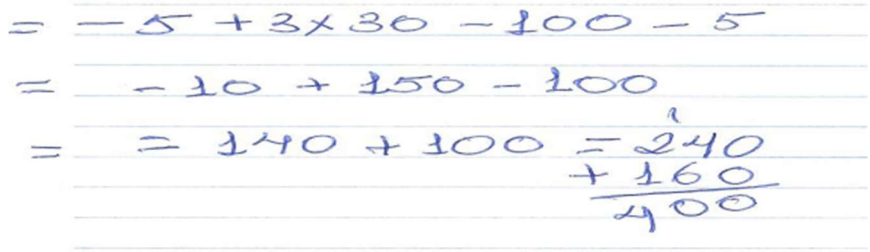
Fonte: Os autores.

Figura 6: 3º registro da dupla I/W.5



Fonte: Os autores.

Figura 7: 4º registro da dupla I/W.



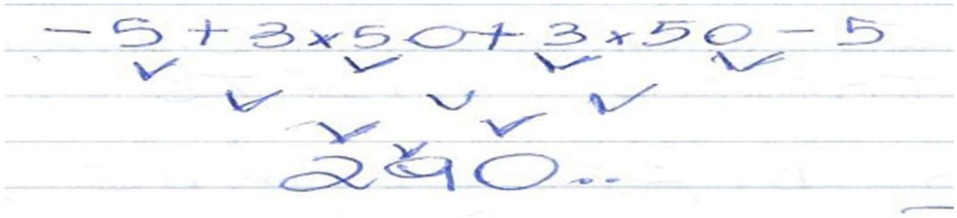
Fonte: Os autores.

Na figura 4 o primeiro registro não foi feito por meio de uma expressão numérica. Na figura 5 o registro das jogadas já está mais formalizado, faltando, entretanto, o sinal de igual no lado esquerdo da expressão, bem como o resultado das operações com a apresentação da pontuação final da jogada. Na figura 6 o registro das jogadas está representado na forma de uma expressão numérica, bem como os cálculos e o resultado da pontuação final da jogada. Na figura 7 o registro das jogadas também está representado na forma de uma expressão numérica, bem como os cálculos. Entretanto, houve um erro

de multiplicação (3 x 30) que não foi percebido e a troca de um sinal na primeira linha (– 100 ao invés de + 100) que foi corrigido na terceira linha, resultando numa pontuação com valor a maior em 60 pontos. Percebe-se, entre o primeiro e o último registro, uma mudança na forma de registro dos elementos matemáticos que evidencia a aprendizagem de representação escrita de uma expressão numérica.

Para a segunda competição as duplas foram sorteadas: um estudante escreveu o nome de cada estudante em uma folha de caderno, cortou, dobrou e depois realizou o sorteio para a formação das novas duplas. Apresentamos alguns registros dessa segunda competição:

Figura 8: 1º registro da dupla L/I.

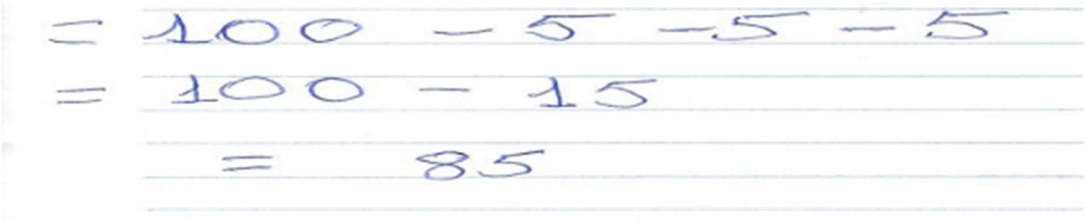


Fonte: Os autores.

Figura 9: 2º registro da dupla L/I.

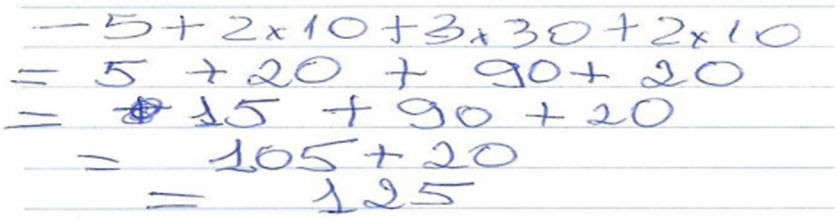
Fonte: Os autores.

Figura 10: 3º registro da dupla L/I.



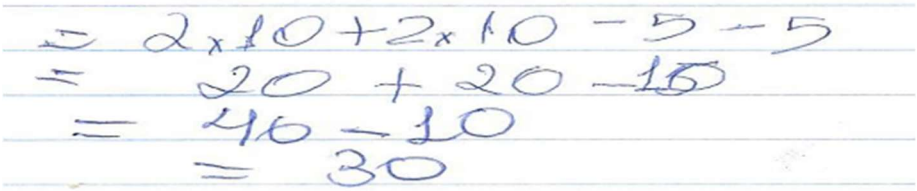
Fonte: Os autores.

Figura 11: 4º registro da dupla L/I.



Fonte: Os autores.

Figura 12: 5º registro da dupla L/I.



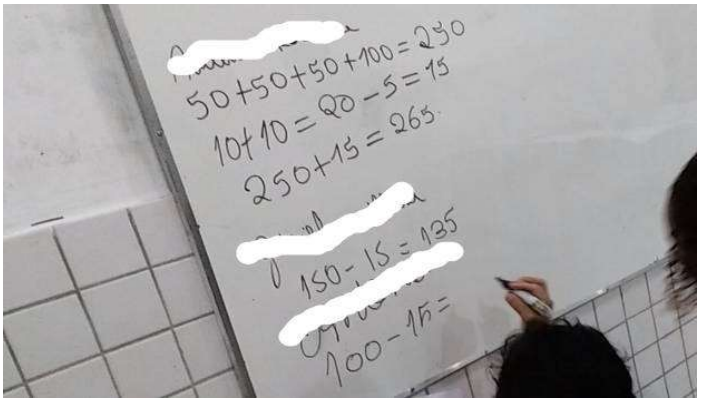
Fonte: Os autores.

Na figura 8 o registro foi feito por meio de uma expressão numérica (ausência do sinal de igual no seu lado esquerdo), não apresentando os cálculos realizados que culminaram na pontuação de 290 – a dupla justificou realização de cálculo mental: "*3 x 50 é igual 150, duas vezes dá 300 e tirando 10 fica 290*". Na figura 9 o registro foi feito por meio de uma expressão numérica ainda com a ausência de sinal de igual no seu lado esquerdo e os cálculos, bem como o resultado não foram escritos. Na figura 10 o registro foi feito por meio de uma expressão numérica na qual consta o sinal de igual no seu lado esquerdo e as operações realizadas. Na figura 11 o registro foi feito por meio de uma expressão numérica na qual consta o sinal de igual no seu lado esquerdo a partir da segunda linha, sendo que o sinal negativo do número 5 não foi escrito nessa linha, mas a operação realizada considerou o sinal negativo desse número (5 + 20 = 15). Na figura 12 o registro foi feito por meio de uma expressão numérica com sinal de igual no seu lado esquerdo, bem como são apresentados os resultados das operações que culminaram no valor final de 30. Percebe-se também uma mudança na forma de registro dos elementos matemáticos que evidencia a aprendizagem de representação escrita de uma expressão numérica.

Na figura 13 apresentamos o registro das jogadas de três duplas no quadro: a primeira dupla lançou 4 dardos alternando os lançadores, 50 + 50 + 50 + 100 = 250, indica a jogada de 2 dardos pelo primeiro lançador, sendo que um dos dardos acertou na região vermelha que valia 50 pontos e deveria ser multiplicada por 3 e o outro dardo acertou na mosca que valia 100 pontos. 10+10 = 20 - 5 = 15, indica a jogada de 2 dardos pelo segundo lançador, sendo que um dardo acertou na região amarela que valia 10 pontos e deveria ser multiplicada por 2 e o outro dardo não acertou o alvo. Essa dupla efetuou ainda a soma das jogadas totalizando 265 pontos. A segunda dupla lançou também 4 dardos e 150 -15 = 135, indica a jogada de 4 dardos pelos lançadores, sendo que um dardo acertou na região vermelha que valia 50 pontos e deveria ser multiplicada por 3 e os outros 3 dardos não

acertaram o alvo. A terceira dupla também lançou 4 dardos e 100 -15 = (sem o resultado) indica a jogada de 4 dardos pelos lançadores, sendo que um dardo acertou na região preta (mosca) que valia 100 pontos e os demais dardos não acertaram o alvo.

Figura 13: Registro da dupla no quadro.

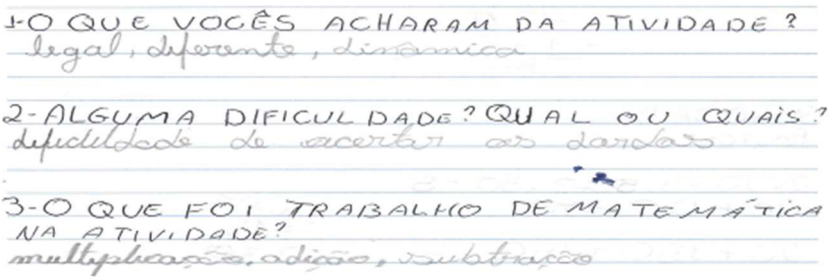


Fonte: Os autores.

Numa das jogadas desse segundo campeonato ocorreu um fato inesperado: um dardo lançado ficou fixado sobre a linha divisória das faixas circulares, entre as regiões amarela e vermelha. "*E agora?*", perguntaram os estudantes. "*O que vai ser considerado: 2 x 10 ou 3 x 50?*". Decidimos considerar a maior pontuação.

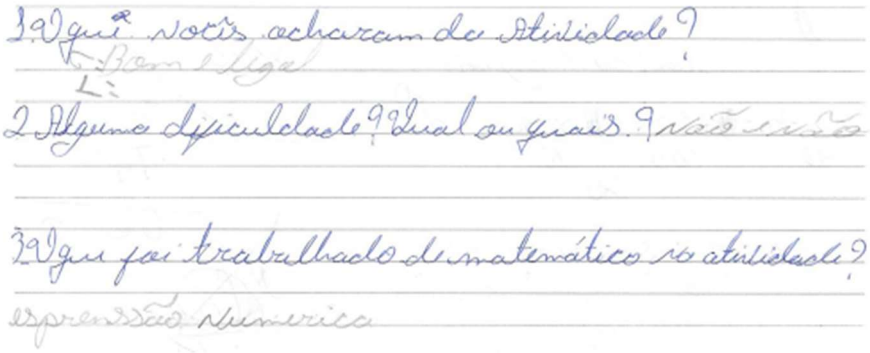
Após o término dessa competição os estudantes responderam três perguntas: 1) O que vocês acharam da atividade? 2º) Alguma dificuldade? Qual ou quais? 3º) O que foi trabalhado de Matemática na atividade? Apresentamos as respostas:

Figura 14: Respostas da dupla H/W.



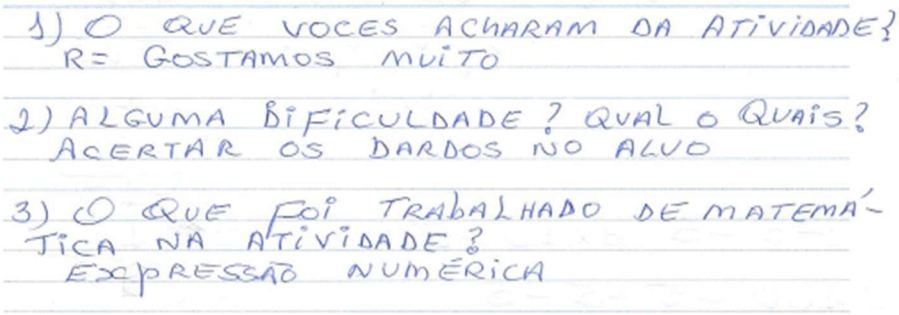
Fonte: Os autores.

Figura 15: Respostas da dupla L/C.


1º Que vocês acharam da Atividade?
Bom e legal
L:
2 Alguma dificuldade? Qual ou quais? Não não
3º Que foi trabalhado de matemática na atividade?
expressão Numerica

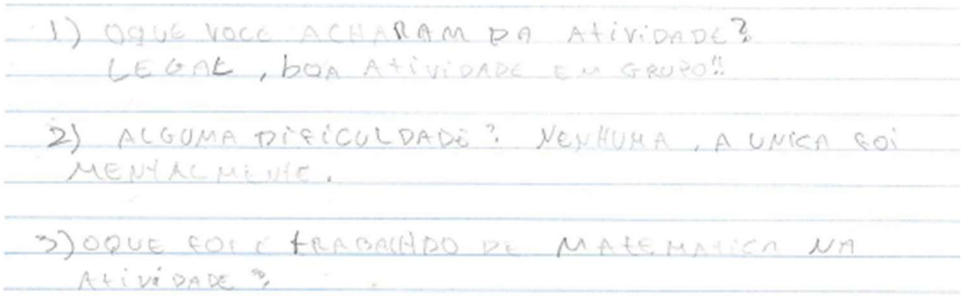
Fonte: Os autores.

Figura 16: Respostas da dupla L/I.


1) O QUE VOCES ACHARAM DA ATIVIDADE?
R= GOSTAMOS MUITO
2) ALGUMA DIFICULDADE? QUAL O QUAIS?
ACERTAR OS DARDOS NO ALVO
3) O QUE FOI TRABALHADO DE MATEMÁ-
TICA NA ATIVIDADE?
EXPRESSÃO NUMÉRICA

Fonte: Os autores.

Figura 17: Respostas da dupla I/F.


1) OQUE VOCE ACHARAM DA ATIVIDADE?
LEGAL, BOA ATIVIDADE EM GRUPO!!
2) ALGUMA DIFICULDADE? NENHUMA, A UNICA FOI
MENTALMENTE.
3) OQUE FOI TRABALHADO DE MATEMATICA NA
ATIVIDADE?

Fonte: Os autores.

Para a primeira pergunta as respostas foram "*legal, diferente, dinâmica; bom e legal; gostamos muito; legal, boa atividade em grupo*". Para a segunda pergunta as respostas foram "*dificuldade de acertar os dardos; não e não; acertar dos dardos no alvo;* e, *nenhuma, a única foi mentalmente*". Para a terceira pergunta as respostas foram "multiplicação, adição, subtração; expressão numérica; e, expressão numérica". Uma das duplas não respondeu a última pergunta.

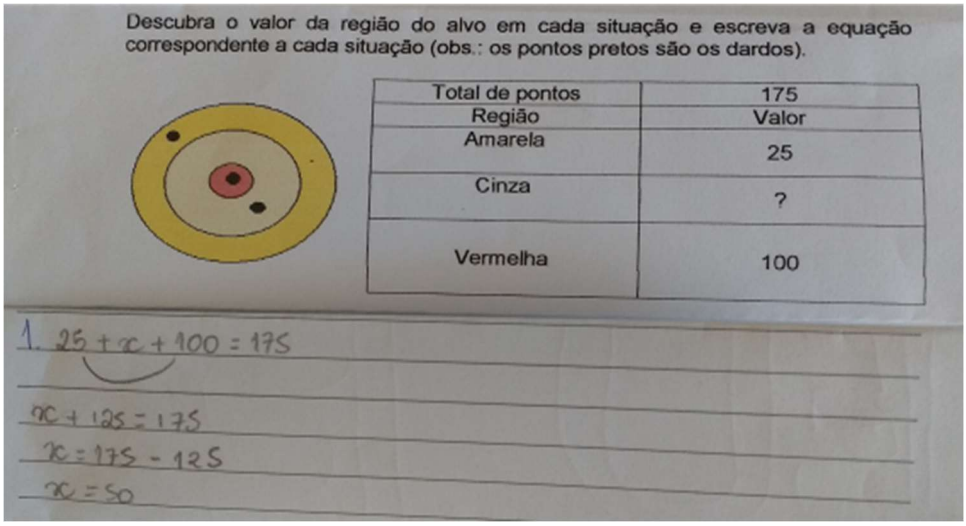
A resposta à primeira pergunta mostra que atividades lúdicas são bem aceitas pelos estudantes e propícias na atividade orientadora de ensino (AOE), ou seja, a situação desencadeadora de aprendizagem pode ser executada por meio de jogos, de situações emergentes do cotidiano ou de uma história virtual do conceito (MOURA, 2016).

A resposta à segunda pergunta mostra que alguns estudantes tiveram dificuldade na realização do jogo de dardos (não é um jogo popular no Brasil), mas mesmo assim participaram e se encantaram pela atividade (conforme respostas da primeira pergunta). Uma dupla respondeu que "*nenhuma, a única foi mentalmente*", que entendemos tratar-se da representação das jogadas de sua dupla por meio de uma expressão numérica, bem como da realização das operações matemáticas fundamentais (adição, subtração e multiplicação) para a determinação de sua pontuação. A dificuldade relatada teria sido, no nosso entendimento, superada na realização das ações de forma coletiva, em duplas de estudantes, outra característica da AOE (MOURA, 2016).

A resposta à terceira pergunta mostra duas duplas que perceberam a finalidade da atividade realizada no seu todo (expressão numérica) e uma dupla que, ao contrário das citadas, percebeu a finalidade da atividade realizada pelas suas partes (multiplicação, adição e subtração). Uma dupla não respondeu a essa pergunta – justamente aquela que havia respondido "*nenhuma, a única foi mentalmente*" para a segunda pergunta. Podemos intuir que cada sujeito tem uma percepção diferente da realidade a que foi exposto e essa percepção dependeria do grau de desenvolvimento de seu pensamento teórico (VIGOTSKI, 2001).

Após o término das respostas os estudantes fizeram uma atividade referente a um campeonato de jogo de dardos, no qual um dos participantes se esqueceu de registrar o valor de uma das partes do alvo, mas anotou a pontuação final de cada jogador. As duplas deveriam descobrir o valor da região do alvo em cada situação e escrever a equação correspondente a cada situação. Apresentamos os registros dessa atividade:

Figura 18: Respostas da dupla L/I.



Descubra o valor da região do alvo em cada situação e escreva a equação correspondente a cada situação (obs.: os pontos pretos são os dardos).

Total de pontos	175
Região	Valor
Amarela	25
Cinza	?
Vermelha	100

1. $25 + x + 100 = 175$

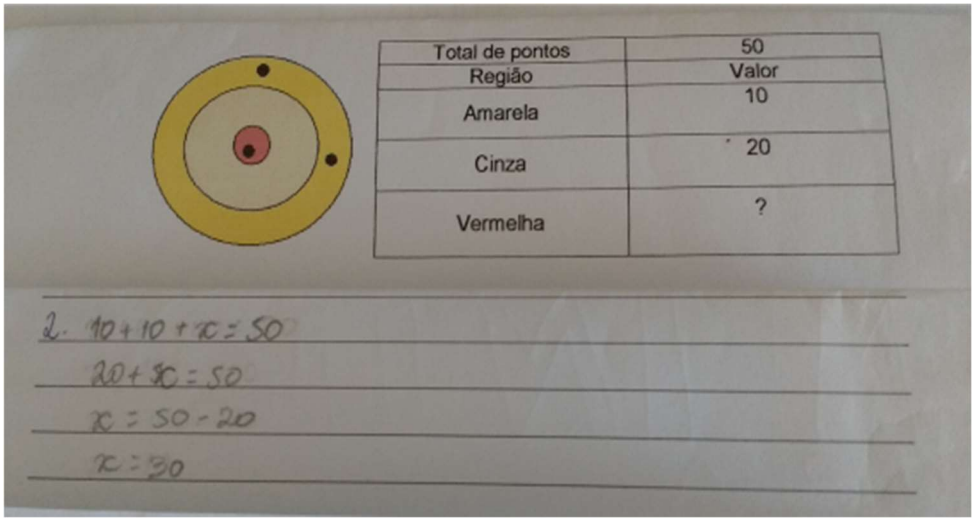
$x + 125 = 175$

$x = 175 - 125$

$x = 50$

Fonte: Os autores.

Figura 19: Respostas da dupla I/F.



Total de pontos	50
Região	Valor
Amarela	10
Cinza	20
Vermelha	?

2. $10 + 10 + x = 50$

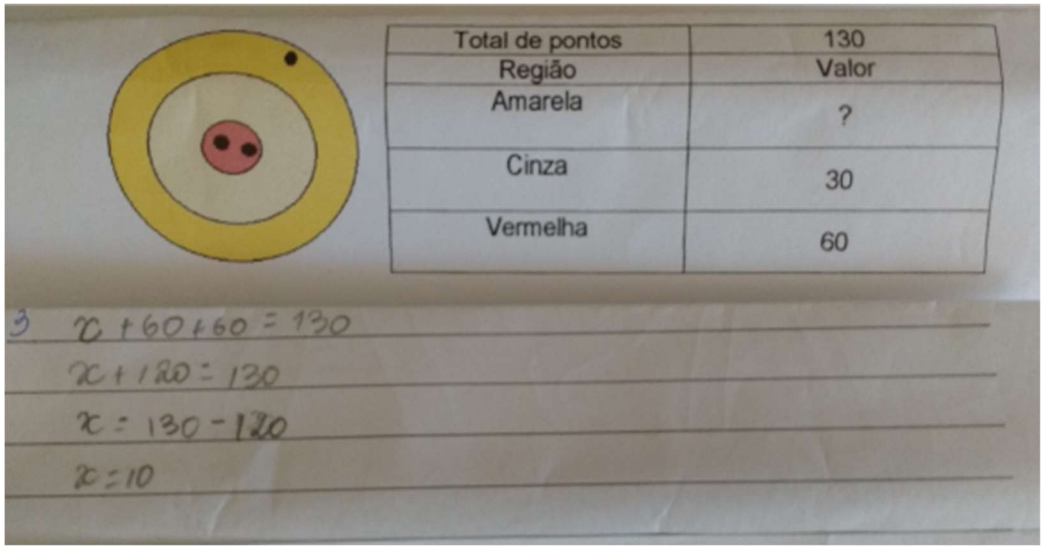
$20 + x = 50$

$x = 50 - 20$

$x = 30$

Fonte: Os autores.

Figura 20: Respostas da dupla L/C.



Total de pontos	130
Região	Valor
Amarela	?
Cinza	30
Vermelha	60

3 $x + 60 + 60 = 130$

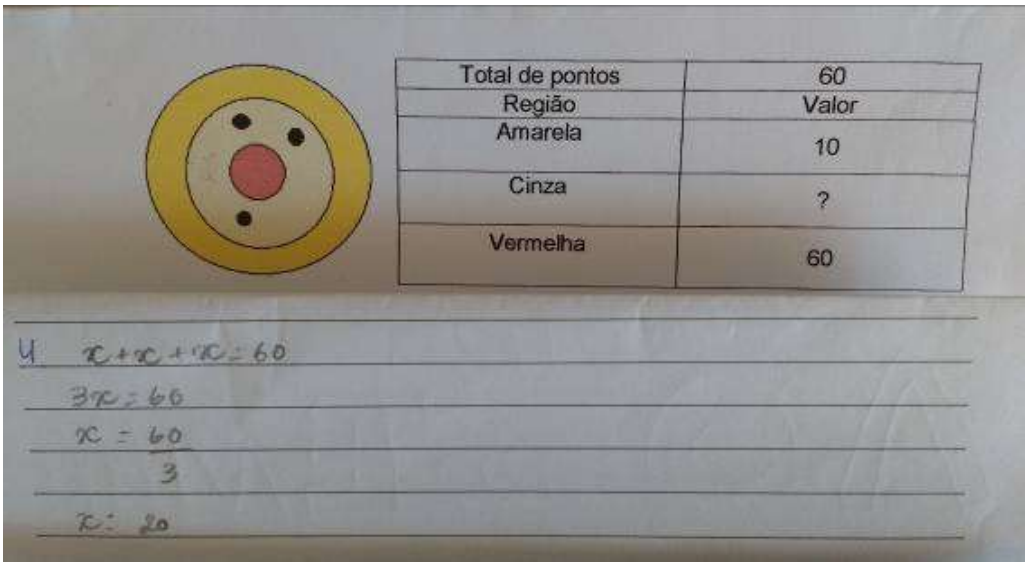
$x + 120 = 130$

$x = 130 - 120$

$x = 10$

Fonte: Os autores.

Figura 21: Respostas da dupla L/C.



Total de pontos	60
Região	Valor
Amarela	10
Cinza	?
Vermelha	60

4 $x + x + x = 60$

$3x = 60$

$x = \frac{60}{3}$

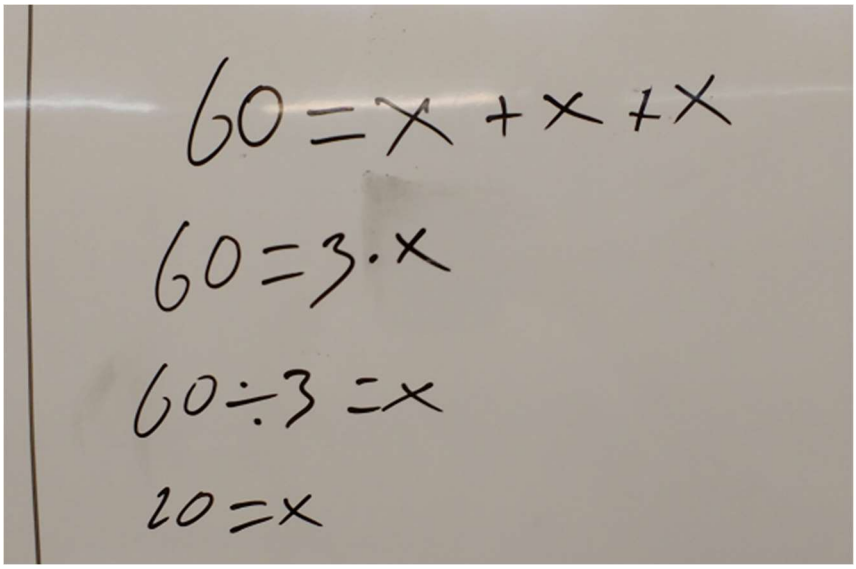
$x = 20$

Fonte: Os autores.

Com relação aos desenhos da atividade proposta verificamos (somente após a sua aplicação) que houve erro de impressão nas cores das faixas do alvo (a região do alvo que teria cor cinza estava com a cor areia). Entretanto, nenhuma das duplas apresentou qualquer comentário ou reclamação a respeito e apesar desse equívoco a realização da atividade transcorreu normalmente. Os estudantes escreveram as “equações de 1º grau” para cada uma das quatro situações propostas observando a “posição dos dardos” e a tabela de pontuação da região do alvo em questão. Ficou evidente que o conceito de

equação (igualdade e incógnita) foi compreendido e bem representado pelas duplas de estudantes. As resoluções foram apresentas também no quadro para o acompanhamento e crítica dos demais estudantes (Figura 22).

Figura 22: Respostas de uma dupla no quadro.



Fonte: Os autores.

3. Conclusão

Concluímos que a atividade foi bem aceita pelos estudantes que participaram com grande interesse. A atividade teve por objetivo propiciar situações que oferecessem o surgimento de equações e teve coerência com a AOE ao ser apresentada por meio de um jogo e realizada de forma coletiva com os estudantes (MOURA, 2016). A SDA utilizada despertou nos estudantes a necessidade da apropriação de conceitos propícios para a solução das questões apresentadas. Na realização da atividade foram necessárias outras ações, tais como: apresentar o jogo de dardos, fixar na parede o alvo na altura padrão, marcar no chão a linha limite para lançamento dos dardos, definir regras, formar duplas por afinidade e por sorteio, jogar dardos, registrar os resultados de cada jogada, escrever e resolver a expressão numérica de cada jogada, responder três perguntas, escrever uma equação e determinar o valor que não foi anotado. Ou seja, na realização de uma determinada ação é possível desencadear outras ações em seu processo (LEONTIEV, 1978).

4. Referências

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino: O clube de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) - São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2004.

MOURA, M. O. (Organizador). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2016.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. 3. ed. Lisboa: Livros Horizonte. 1978.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

DEDUÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE HISTÓRICA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Leonardo Martins, Edmar Reis Thiengo

professor@leomartins.net

Resumo: Mesmo com todo o avanço tecnológico e todas as diversas fontes de informações disponibilizadas atualmente, o livro didático permanece um importante recurso em sala de aula, de fácil acesso para alunos e professores, sendo ainda o mais usual. As pesquisas sobre livros didáticos crescem a cada dia, cada uma com sua peculiaridade. A presente pesquisa tem o seguinte questionamento: Como os livros didáticos de matemática vem abordando, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível? Tendo como objetivo geral discutir, historicamente as deduções da altura de objetos com bases inacessíveis, presentes nos livros didáticos de Matemática. Os objetivos específicos foram: apresentar o histórico do livro didático no Brasil; discorrer sobre a trigonometria no triângulo retângulo; ilustrar a proposta da pesquisa; apresentar as deduções propostas para o ensino da trigonometria; e analisar as explicações, exemplos, atividades de livros didáticos desde 1929. Para fundamentar teoricamente a pesquisa primou em apresentar evolução histórica dos livros didáticos e, em seguida, discutido sobre o ensino da trigonometria no brasil. A pesquisa é de caráter documental, realizando análises dos livros didáticos, do período citado, na busca insistente de alcançar os objetivos propostos por meio das análises feitas nas explicações, deduções, exemplos, exercícios e, inclusive, figuras.

Palavras Chaves: Trigonometria no Triângulo Retângulo. Altura inacessível. Ângulos notáveis.

1. Introdução

Em se tratando de trigonometria no triângulo retângulo, o conteúdo tem sido abordado no Livro Didático de forma rápida, superficial e, na maioria das vezes, repetitivo em relação ao que é abordado em anos anteriores. De forma geral, os autores explicam as razões trigonométricas, apresentam os ângulos notáveis e, em seguida, deduzem os ângulos notáveis.

Um dos entraves iniciais ao aplicar o conteúdo de trigonometria, em especial a variação entre ângulos, ocorre devido à ausência de explicação ou modelo de resolução dessas situações-problemas. Dessa forma, a presente pesquisa visa responder ao seguinte questionamento: como os livros didáticos de matemática vêm abordando, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível?

Para respondê-lo, tem como objetivo geral discutir, historicamente, as deduções da altura de objetos com bases inacessíveis, presentes nos livros didáticos de Matemática.

Somado ao objetivo geral, os objetivos específicos referem-se a: verificar os períodos em que as deduções pesquisadas foram abordadas nos livros didáticos de matemática; comparar as diferentes formas de deduções em questão, presentes nos livros didáticos de Matemática ao longo da história; propor possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja distância a base é inacessível, utilizando a variação de ângulos notáveis.

Assim, ao atender aos objetivos propostos, o resultado da pesquisa poderá ser um material importante de consulta, informação etc., para os professores de Matemática, possibilitando, desse modo, uma nova abordagem do conteúdo de trigonometria por meio da variação de ângulos notáveis.

Pelo exposto, justifica-se a presente pesquisa devido ao fato de que as deduções aqui propostas podem auxiliar os alunos na agilidade de resolução de situações-problemas que envolvam variações entre ângulos notáveis. À comunidade, de forma geral, torna-se uma proposta às editoras para que possam incluir tais deduções como dicas e sugestões em seus livros didáticos, tornando mais prática a resolução de problemas com esse contexto.

2. Livro Didático, Concepção e Evolução Histórica

Não é de se estranhar que as pesquisas em livros didáticos têm se expandido. Choppin (2004, p. 551) afirma que, durante muito tempo, pesquisas sobre livros didáticos tinham sido negligenciadas e foi somente a partir dos anos 1960 e, principalmente, de 1980 que ocorreu um considerável impulso.

Assim sendo, pesquisas relacionadas a livros didáticos têm se tornado relevantes entre pesquisadores, seja em relação ao levantamento histórico de suas concepções e conceitos generalistas, seja para identificar e compreender o tipo de abordagem de conteúdos da disciplina a que se destina.

No entanto, para Bittencourt (2004), embora esse instrumento tenha sido classificado culturalmente como de menor valor, passou, porém, a ser analisado sob outra ótica, o que permitiu perceber seu aspecto educativo, bem como sua importância na e para a escola. Segundo a autora, o livro é essencial no processo de escolarização.

Ainda segundo outros autores, como Dante (1996, p. 83), "[...] o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente". Lajolo (1996) assevera que os países como o Brasil, que tem precariedade nas situações relacionadas à educação, faz com que o livro "[...] acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina".

Contudo, Bittencourt (2004) destaca que o livro didático não é uma ferramenta simples, mas sim complexa. E Choppin (2004), ao observar a complexidade, define quatro funções principais aos livros: referencial, instrumental, ideológica e documental. O autor destaca que essas funções "[...] podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, à época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização" (CHOPPIN, 2004, p. 553).

2.1 Programas Governamentais e os Livros Didáticos

Para Filgueiras (2013, p. 161-162) "[...] analisar como o Estado buscou controlar a produção e o uso dos livros didáticos é fundamental, pois demonstra como os sujeitos envolvidos com o controle dos manuais pretendiam definir o que era legítimo e poderia ser estudado pelos alunos".

A partir da década de 1930, por exemplo, as publicações nacionais tornaram-se mais frequentes, porém as primeiras concepções de livro didático no Brasil datam no ano de 1929, mas somente em 1938, por decreto, ocorreram as primeiras fiscalizações com o objetivo de controlar as informações que seriam ministradas (TURÍBIO, 2015).

No Decreto nº 1.006 de 1938, que estabelecia, naquela época, as condições para produção, importação e uso dos livros didáticos, foi apresentada também a primeira definição para livro didático em território brasileiro. O art. 2° do referido decreto contém a conceituação de livro didático, conforme a seguir:

> Para os efeitos da presente lei, são considerados livros didáticos os compêndios e os livros de leitura de classe.
>
> § 1º- Compêndios são livros que exponham total ou parcialmente a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares.
>
> § 2º- Livros de leitura de classe são os livros usados para leitura dos alunos em aula (BRASIL, 1938, p. 2).

Por meio do Decreto nº 91.542, em 1985, o governo implantou o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com a finalidade de distribuir livros didáticos aos estudantes das escolas públicas de 1º Grau (BRASIL, 1985). Instituiu também a reutilização dos livros didáticos, tornando-os não mais descartáveis, e determinou a participação direta dos professores na seleção dos livros que seus alunos iriam utilizar.

3. Metodologia

Para desenvolver o presente estudo foi utilizado o método de pesquisa documental. Justifica-se essa opção porque, para Thiengo (2001), os objetos desse tipo de pesquisa são considerados como documentos e, para obter as informações necessárias, será utilizada a análise de conteúdo dos livros didáticos pesquisados. Samara e Tupy (2010) destacam que esse método possibilita uma reprodução da informação e de forma fidedigna permite as devidas citações.

As autoras propõem uma abordagem mais ampla dos documentos, o que permite uma discussão produtiva sobre um conjunto determinado de elementos, de acordo com os requisitos de análise, desde que haja condições científicas para uma contextualização adequada. É preciso, por sua vez, exaurir ao máximo as informações passiveis de serem coletadas dos documentos analisados.

3.1 Materiais e Método

Foram selecionados entre os livros didáticos de Matemática todos os livros do Ghemat e do acervo pessoal com o conteúdo trigonometria. De modo geral, esses materiais possibilitam fazer um levantamento documental significativo a respeito da abordagem trigonométrica em livros didáticos. A Tabela 1 a seguir contém a quantidade de livros utilizados do acervo pessoal e do acervo do repositório do Ghemat.

Tabela 1: Relação entre acervo pessoal e do Ghemat

ACERVO	QUANTIDADE
Livros didáticos do acervo pessoal	62
Livros didáticos do acervo Ghemat	125

TOTAL	187

Fonte: Os autores.

Inicialmente, a busca foi por livros didáticos com o conteúdo de trigonometria, porém, devido à distância geográfica e ao tempo disponível para pesquisar na biblioteca durante o mês de dezembro de 2017 e janeiro de 2018, a opção foi adquirir livros didáticos datados entre 1904 a 1997; os livros posteriores a esse período, inclusive publicações do PNLD de 2018 já existiam no acervo pessoal.

O instrumento utilizado nesta pesquisa foi o Microsoft Office Excel, elaborado para fazer a organização dos dados e das análises dos livros didáticos. Esse instrumento surgiu após discussões e análises prévias do material que, em sua versão definitiva, serão descritos a seguir, sendo possível associar a cada um deles os objetivos deste trabalho, refletindo o foco de interesse do estudo. Assim, o instrumento elaborado tem por base os seguintes itens de análise: variação entre ângulos; explicação didática para medidas inacessíveis com variação de ângulos; e ilustrações.

4. Análise de Dados

Os dados desta pesquisa apontam que, desde as primeiras concepções dos compêndios até as últimas edições lançadas desses materiais em 2017, a abordagem didática das explicações sobre a variação entre ângulos, para determinar altura de objetos cuja base é inacessível, passou por significativas mudanças na forma de se expressar. Porém houve um período que não foram discutidas nesses materiais, havendo significativas mudanças na forma didática propostas nos livros. A Tabela 3 representa a quantidade de materiais pesquisados que contemplam esse conteúdo por período.

Tabela 3: Metodologia utilizada para demonstração da variação de ângulos

PERÍODO	QUANTIDADE	ABORDAGEM
1929 A 1950	0	Não houve abordagem
Década de 50	1	Lei Geral
Década de 60	2	Lei Geral
Década de 70	1	Lei Geral

Década de 70	1	Sistema
Década de 80	3	Sistema
Década de 90	1	Sistema
A partir de 2000	5	Propriedades dos Triângulos
2017	1	Sistema
TOTAL	15	

Fonte: Os autores.

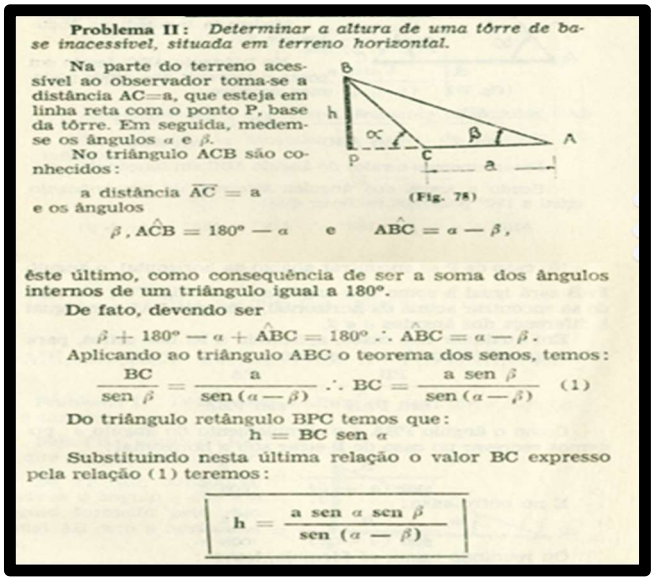
A Tabela 3 mostra que, inicialmente, o conteúdo variação entre ângulos notáveis somente começou a integrar os conteúdos dos materiais na década de 50, ficando ausente dos livros até então. Contudo, durante as décadas de 50, 60 e 70, a abordagem referente à variação entre ângulos notáveis ocorreu por meio da Lei Geral, sendo abordada nessa situação por meio da Lei do Seno. No final da década de 70 até a década de 90, o método apresentado envolvia o Sistema de Equações. Por fim, a partir de 2000, o procedimento para resolução demonstrado era feito por meio das Propriedades do Triângulo, e uma edição em 2017 retoma a explanação por meio de Sistema de Equações.

4.1 Explicação didática pela Lei Geral

O período desse modelo didático é identificado na pesquisa pelas décadas de 50, 60 e 70, nos livros didáticos dos autores Sérgio Sonino (1958, p. 162), Carlos Galante e Antonio de Souza Teixeira Jr. (1965, p. 171), Luiz Mauro Rocha, Ruy Madsen Barbsa, Scipione Di Pierro Neto (1967, p. 206), Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic (1979, p. 193). Esses livros apresentam a resolução utilizando a fórmula geral para determinar a altura de objetos cuja base é inacessível por meio da variação entre ângulos.

Para esclarecer e explicar a variação dos ângulos por meio da Lei Geral, a Figura 1 contém um exemplo de problema e ilustrações com essa abordagem.

Figura 1: Dedução por meio da Lei Geral na Década de 60



Problema II: *Determinar a altura de uma tôrre de base inacessível, situada em terreno horizontal.*

Na parte do terreno acessível ao observador toma-se a distância AC=a, que esteja em linha reta com o ponto P, base da tôrre. Em seguida, medem-se os ângulos α e β.

No triângulo ACB são conhecidos:

a distância $\overline{AC} = a$

e os ângulos

$$\beta, \hat{ACB} = 180° - \alpha \quad \text{e} \quad \hat{ABC} = \alpha - \beta,$$

êste último, como consequência de ser a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°.

De fato, devendo ser

$$\beta + 180° - \alpha + \hat{ABC} = 180° \therefore \hat{ABC} = \alpha - \beta.$$

Aplicando ao triângulo ABC o teorema dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{\text{sen } (\alpha - \beta)} \therefore BC = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha - \beta)} \quad (1)$$

Do triângulo retângulo BPC temos que:

$$h = BC \text{ sen } \alpha$$

Substituindo nesta última relação o valor BC expresso pela relação (1) teremos:

$$h = \frac{a \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha - \beta)}$$

(Fig. 78)

Fonte: GALANTE; TEIXEIRA (1965, p. 171-172)

Em todos os quatros livros abordados, que demonstram a variação de ângulos e utilizam a Lei Geral, é perceptível a preocupação dos autores para conseguir abordar o tema utilizando os conteúdos preliminares, explicados em capítulos anteriores. Em todos os casos o tema foi abordado após a explicação dos seguintes conteúdos: circunferência trigonométrica, funções trigonométricas e sistemas de equações trigonométricas.

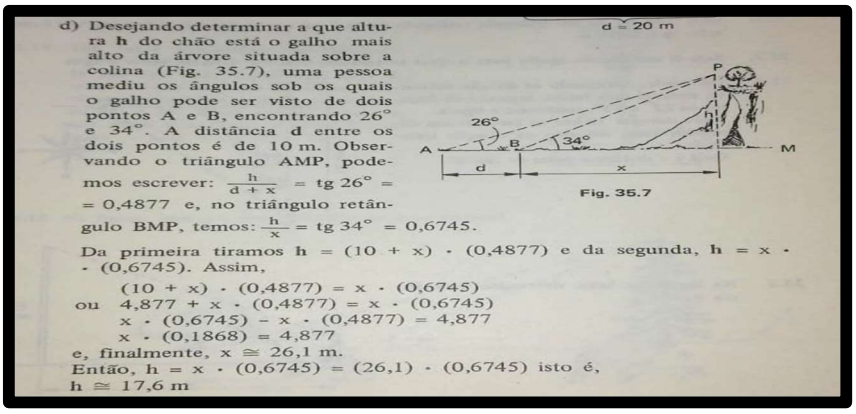
Desde então essas deduções e propostas de resoluções não foram mais publicadas nos livros didáticos. Percebe-se o nível de complexidade elevado desse modelo de resolução devido à utilização de operações com várias casas decimais, bem como a compreensão algébrica e trigonométrica necessária, o que dificulta a compreensão por quem não detém tais habilidades de cálculos.

4.2 Explicação didática por Sistema de Equações

Na década de 70 ocorreu uma transição do modelo apresentado nos materiais didáticos, se por um lado as deduções eram complexas, por outro deveriam ser desenvolvidas formas mais simples para resolver situações-problemas envolvendo variação entre ângulos. Nesse contexto, alguns autores propuseram utilizar o Sistema de Equações para que fosse possível o cálculo de altura de objetos cuja base é inacessível.

Observa-se o uso desse método em cinco livros das décadas de 70, 80 e 90, de autoria de: José Luiz Pereira Sampaio, Nilton Lapa e Sidney Luiz Cavalcantte (1977); Antar Neto (1984); Antonio dos Santos Machados (1986); José Carlos Teixeira, Vicenzo Bongiovanni, Roberto Benedicto (1988); e Antonio dos Santos Machado (1996). A Figura 2 contém a explicação de variação entre ângulos por meio de Sistema de Equações

Figura 2: Utilizando Sistemas de Equações na variação de ângulos.



d) Desejando determinar a que altura **h** do chão está o galho mais alto da árvore situada sobre a colina (Fig. 35.7), uma pessoa mediu os ângulos sob os quais o galho pode ser visto de dois pontos A e B, encontrando 26° e 34°. A distância **d** entre os dois pontos é de 10 m. Observando o triângulo AMP, podemos escrever: $\frac{h}{d + x} = \text{tg } 26° = 0{,}4877$ e, no triângulo retângulo BMP, temos: $\frac{h}{x} = \text{tg } 34° = 0{,}6745$.

Fig. 35.7

Da primeira tiramos $h = (10 + x) \cdot (0{,}4877)$ e da segunda, $h = x \cdot (0{,}6745)$. Assim,

$$(10 + x) \cdot (0{,}4877) = x \cdot (0{,}6745)$$
$$\text{ou } 4{,}877 + x \cdot (0{,}4877) = x \cdot (0{,}6745)$$
$$x \cdot (0{,}6745) - x \cdot (0{,}4877) = 4{,}877$$
$$x \cdot (0{,}1868) = 4{,}877$$

e, finalmente, $x \cong 26{,}1$ m.

Então, $h = x \cdot (0{,}6745) = (26{,}1) \cdot (0{,}6745)$ isto é, $h \cong 17{,}6$ m

Fonte: MACHADO (1996, p. 173)

A Figura 2 detalha a resolução de alturas com variação de ângulos por meio de Sistema de Equações. Nas duas propostas de resoluções fica evidente o sequenciamento didático utilizado nos livros escolares, em outras palavras, a importância de deter conhecimento sobre o conteúdo de anos/séries anteriores para obter êxito em conteúdos posteriores.

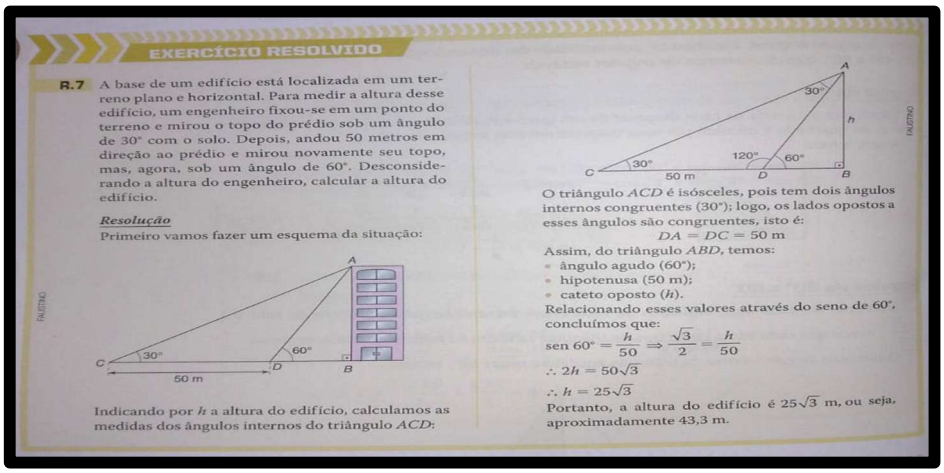
Apesar de ser uma das principais estratégias dos docentes para explanar esse conteúdo, a variação dos ângulos notáveis esteve ausente dos livros didáticos após o ano de 2000, retornando em uma das obras de 2017 com utilização do método como uma das soluções desse tipo de situações-problemas.

4.3 Explicação didática pelas Propriedades do Triângulo

A abordagem utilizada após o ano 2000 envolve as propriedades dos triângulos para resolver problemas e as situações-problemas utilizando esse método.

Nesse sentido, as obras relevantes abordando esse procedimento têm autoria de: Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva (2003); Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva (2005); Fábio Martins de Leonardo (2013); Manoel Paiva (2013); Joamir Souza e Jaqueline Garcia (2016). A Figura 3 a seguir mostra o exemplo do livro do Manoel Paiva com essa abordagem.

Figura 3: Sistema de Equações e Raízes na variação de ângulos.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução

Primeiro vamos fazer um esquema da situação:

Indicando por h a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD:

O triângulo ACD é isósceles, pois tem dois ângulos internos congruentes (30°); logo, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é:

$$DA = DC = 50 \text{ m}$$

Assim, do triângulo ABD, temos:

- ângulo agudo (60°);
- hipotenusa (50 m);
- cateto oposto (h).

Relacionando esses valores através do seno de 60°, concluímos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{50}$$

$$\therefore 2h = 50\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 25\sqrt{3}$$

Portanto, a altura do edifício é $25\sqrt{3}$ m, ou seja, aproximadamente 43,3 m.

Fonte: PAIVA (2013, p. 14)

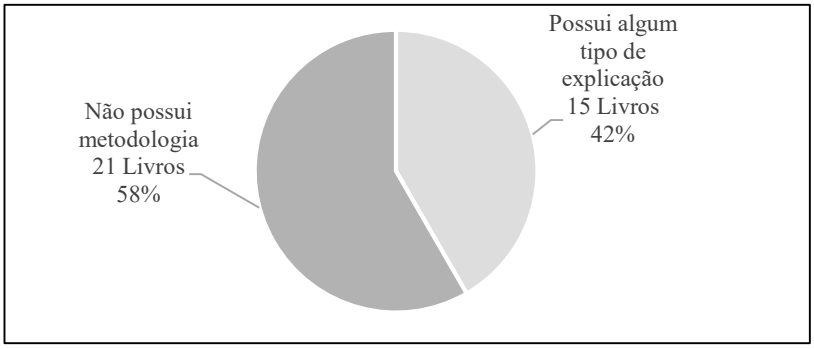
Ao analisar a Figura 3 fica evidente a demonstração da variação por ângulo notável sobre a percepção das propriedades dos triângulos. Nessa situação, o autor mantém os radicais até o fim e os compara com o valor aproximado, se substituir por uma raiz aproximada.

4.4 Ausência de explicação didática

Ao analisar o conteúdo de trigonometria presente nos materiais pesquisados foi perceptível a abordagem da variação de ângulos de forma bem discreta em alguns livros. Nesses materiais, os autores apresentaram essa parte do conteúdo de trigonometria em suas obras apenas em exercícios, sem uma demonstração de como resolvê-la, sem um exemplo para auxiliar ou estimular o aluno a alcançar a resolução adequada.

Nessa perspectiva, o Gráfico 1 a seguir mostra a relação entre a quantidade de livros que abordam metodologias para resolução com variação de ângulos com os livros que, mesmo sem apresentar alguma metodologia de resolução, abordam esse conteúdo.

Gráfico 1: Relação entre os livros com explicação e sem explicação de variação entre ângulos notáveis



Fonte: Os autores.

De acordo com Gráfico 1 pode-se inferir que, na maioria dos livros, o conteúdo é abordado sem dar explicação ao leitor. Destaca-se também que 14% (3 unidades) desses livros são de Volumes Únicos do Ensino Médio, cabendo ao docente, discente ou ao leitor, que utilizam esses exemplares, já possuir os conhecimentos necessários para desenvolver as atividades neles propostas.

Os demais materiais são de coleções de Ensino Fundamental Séries Finais e do Ensino Médio; 62% (13 unidades) são do 9°Ano/8ªSérie do Ensino Fundamental e da 1ª Série do Ensino Médio. Desse modo, evidencia-se a intenção do autor em desenvolvê-las por meio de Sistemas de Equações ou aplicar as propriedades dos triângulos, conteúdos esses que são abordados em Ano/Série anterior.

5. Proposta de Deduções

As deduções aqui presentes são resultado do trabalho docente do pesquisador que vislumbra propor possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja distância a base é inacessível, utilizando a variação de ângulos notáveis.

Assim, este capítulo será dividido em dois momentos importantes de forma a compreender as deduções de forma ampla e completa. Inicia apresentando uma situação-problema de aferição de alturas de objetos em distâncias inacessíveis à base e conceituação dos termos utilizados neste estudo. Três tópicos virão em seguida, contemplando as deduções propostas para as variações com ângulos notáveis.

5.1 Conceitos Iniciais e Aplicabilidade

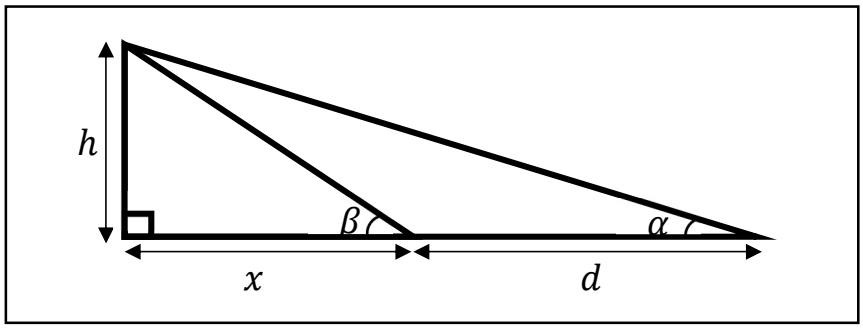
Antes de apresentar as deduções propostas é necessário propor uma situação-problema, de forma que seja possível compreender melhor sua aplicabilidade, bem como obter a compreensão espacial dos temas abordados.

Para tanto, o pensamento precisa estar focado em aferir a altura de algum objeto (torre, árvore, prédio, parede, escada, caixa-d'água, entre outros); tal objeto deve ser perpendicular (que se intercepta em um ângulo reto – 90°) em uma superfície plana. Assim, esse objeto deve ser posicionado de tal forma que sua base esteja inacessível (pode ser um lago em volta de uma torre, um muro que protege um prédio, uma árvore dentro de um lote com animais protegendo o perímetro, entre outros).

Em uma situação como essa, para que seja possível aferir a altura do objeto é necessário, então, fazer a aferição do ângulo de observação por duas vezes e calcular a distância que se afasta entre um ponto de observação do objeto até o segundo ângulo de observação para o mesmo objeto, formando, obrigatoriamente, dois ângulos distintos.

Ciente dessa situação, o próximo passo é construir o modelo matemático que representa toda a situação-problema por meio de um desenho com segmentos de retas, ângulos e distâncias aferidas. A Figura 4 a seguir contém um exemplo de um modelo matemático.

Figura 4: Modelo matemático demonstrando a variação entre ângulos



Fonte: Os autores.

A Figura 4 contém a letra "h" representando a altura do objeto a ser aferida. A letra "x" corresponde à distância inacessível, distância essa que não é possível aferir por meios comuns. A letra "d" equivale à distância entre os ângulos aferidos. No modelo, é a distância entre o ângulo β ao ângulo α. O ângulo β é um ângulo notável, e o ângulo α é um ângulo notável diferente de β.

5.2 Proposta I: Afastamento entre os ângulos de 60° e 30°

Na Figura 4, considerando-se os ângulos β e α, respectivamente com valor de 60° e 30°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução, ilustrada na Figura 5 a seguir.

Figura 5: Proposta de dedução para altura com variação entre ângulos de 60° e 30°

$$Tg\ 30° = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+x}$$

$$\frac{(d+x)\sqrt{3}}{3} = h$$

$$Tg\ 60° = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\left(d + \frac{h}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{3} = h$$

$$\frac{d\sqrt{3} + \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{3} = h$$

$$d\sqrt{3} + h = 3h$$

$$d\sqrt{3} = 3h - h$$

$$d\sqrt{3} = 2h$$

$$\frac{d\sqrt{3}}{2} = h$$

Fonte: Os autores

5.3 Proposta II: Afastamento entre os ângulos de 60° e 45°

Na Figura 4, considerando-se os ângulos β e α, respectivamente com valor de 60° e 45°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução, ilustrada na Figura 6 a seguir.

Figura 6 - Proposta de dedução para altura com variação entre ângulos de 60° e 45°

$$Tg\ 60° = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$Tg\ 45° = 1$$

$$Tg\ 45° = \frac{h}{d+x}$$

$$Tg\ 45° = \frac{h}{d+x}$$

$$1 = \frac{h}{d+x}$$

$$d + x = h$$

Logo, substituindo x na segunda equação temos:

$$d + \frac{h}{\sqrt{3}} = h$$

$$d = h - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = d$$

$$\frac{h(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = d$$

$$h(\sqrt{3}-1) = d\sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{3}-1) = d\sqrt{3}$$

$$h = \frac{d\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$h = \frac{d\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$h = \frac{d\sqrt{9}}{\sqrt{9}-1} + \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{9}-1}$$

$$h = \frac{d3}{3-1} + \frac{d\sqrt{3}}{3-1}$$

$$h = \frac{d3}{3-1} + \frac{d\sqrt{3}}{3-1}$$

Logo, temos que:

$$h = \frac{d3}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

Fonte: Os autores.

5.4 Proposta III: Afastamento entre os ângulos de 45° e 60°

Na Figura 4, considerando-se os ângulos β e α, respectivamente com valor de 60° e 45°, apresenta-se a seguinte proposta de dedução, ilustrada conforme a Figura 7 a seguir.

Figura 7: Proposta de dedução para altura com variação entre ângulos de 60° e 30°

$Tg\ 30° = \frac{C.O}{C.A}$	Tg 45° = 1
$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+x}$	Logo $x = h$
$\frac{(d+x)\sqrt{3}}{3} = h$	
Substituindo x na equação por h, temos:	
$\frac{(d+h)\sqrt{3}}{3} = h$	$\frac{3d\sqrt{3}}{9-3} + \frac{3d}{9-3} = h$
$(d+h)\sqrt{3} = 3h$	$\frac{3d\sqrt{3}}{6} + \frac{3d}{6} = h$
$d\sqrt{3} + h\sqrt{3} = 3h$	$\frac{d\sqrt{3}}{2} + \frac{d}{2} = h$
$d\sqrt{3} = 3h - h\sqrt{3}$	Logo, $h = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}$
$d\sqrt{3} = h(3-\sqrt{3})$	
$\frac{d\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})} = h$	
$\frac{d\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})} \cdot \frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} = h$	
$\frac{3d\sqrt{3}}{9-\sqrt{9}} + \frac{d\sqrt{9}}{9-\sqrt{9}} = h$	

Fonte: Os autores.

De acordo com as três propostas apresentadas anteriormente, a Figura 8 mostra o resumo das deduções sugeridas:

Figura 8: Resumo das deduções para determinar altura por meio da variação de ângulos notáveis

Variação	Dedução Final
60° para 30°	$\boldsymbol{h = \frac{d\sqrt{3}}{2}}$
60° para 45°	$\boldsymbol{h = \frac{d3}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}}$
45° para 30°	$\boldsymbol{h = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}}$

Fonte: Os autores.

6. Considerações Finais

Ao longo dos anos, os livros didáticos têm sido, de fato, uma das fontes mais importantes de pesquisa, visto a discussão proposta neste estudo. Muitas legislações foram criadas e outras sofreram adaptações de acordo com as necessidades de cada tempo histórico vivido pela sociedade com suas características marcantes cravadas nos livros didáticos e na educação como um todo.

Em relação à abordagem da variação entre ângulos no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo não foi diferente. Foi necessário, então, obter conhecimento acerca das evoluções ocorridas nos livros didáticos que abordam esse tema em especial. Assim, pela importância de ensinar esse conteúdo para os alunos, a presente pesquisa visou responder ao seguinte questionamento: como os livros didáticos de Matemática vêm abordando, ao longo da história, as deduções da altura de objetos, cuja base é inacessível?

Para responder a essa inquietação a pesquisa apresentou, sem querer exaurir os conteúdos abordados, uma discussão histórica sobre a evolução das pesquisas em livros didáticos e das leis que regem esse material no Brasil. Por meio do método de pesquisa documental desenvolveu-se a organização do material para ser analisado e foram feitas análises. As análises realizadas evidenciaram que nem sempre as variações entre ângulos notáveis foram abordadas nos livros didáticos. Destaca-se uma defasagem de duas décadas até o início da década de 50, quando, finalmente, essa parte da trigonometria foi abordada. Além disso, os autores abordaram três métodos em suas obras: A lei geral, sistema de equações e propriedades do triângulo.

Por sua vez, a pesquisa propõe possíveis deduções para determinar a altura de objetos cuja distância a base é inacessível, utilizando a variação de ângulos notáveis. Devido à importância desse conteúdo para o estudo da Matemática, a proposta aqui apresentada adquire significativa relevância também para a Educação Matemática, pois é comum o professor de Matemática desenvolver apenas os conteúdos disponibilizados no livro didático que utiliza. Isso poderá resultar em aproveitamento incipiente do conteúdo, dificultar para o aluno aproximar-se de outras situações e/ou padrões matemáticos em que possa notar seu uso, bem como colaborar para o melhor rendimento do aluno, entre outro.

7. Referências

BITTENCOURT, C. M. F. **Em foco:** história, produção e memória do livro didático (Apresentação). Educação e Pesquisa (USP), São Paulo, v. 30, n. 3, p. 471- 473, 2004.

BRASIL. Decreto - Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. Rio de Janeiro, 30 de dezembro de 1938. Disponível em: < http://www2. camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-35074 1-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 02 de abril de 2018.

BRASIL. Decreto - Lei nº 91.542, de 19 de agosto 1985. Câmara dos Deputados. Brasília, 19 de agosto de 1985. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1980-1987/decreto-91542-19-agosto-1985- 441959-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 02 de abril de 2018.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas:** sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro didático de matemática**: uso ou abuso? Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. p. 83-97.

FILGUEIRAS, Juliana M. **As avaliações dos livros didáticos na Comissão Nacional do Livro Didático**: a conformação dos saberes escolares nos anos 1940. Rev. bras. hist. educ., Campinas-SP, v. 13, n. 1 (31), p. 159-192, jan./abr. 2013.

GALANTE, Carlos; TEIXEIRA, Antonio de Souza. Trigonometria no Curso Colegial. São Paulo, do Brasil, 1965, p. 171-172.

LAJOLO, Marisa. **Livro Didático:** um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. P. 3-9.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** São Paulo, Moderna, 20013.

SAMARA, Eni de Mesquita; TUPY, Ismênia S. Silveira. **História & documentos e metodologia de pesquisa**. Belo Horizonte, Autêntica, 2010.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática na escola do Segundo Grau**. São Paulo, Atual, 1996, p. 173.

THIENGO, Edmar Reis. **A matemática de Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi:** Um estudo comparativo.

TURÍBIO, Solange Ramos Teixeira. **As mudanças ocorridas no livro didático de matemática e a sua influência na prática pedagógica do professor.** 2015. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Ppgedu/ufmt, Universidade Federal de Mato Grosso, Rondonópolis, 2015.

DESVENDANDO AS EXPRESSÕES "VAI UM" E "EMPRESTA UM", UTILIZADAS NOS ALGORITMOS DA SOMA E SUBTRAÇÃO, COM O APLICATIVO MULTIBASE

Vito Rodrigues Franzosi, Rony Cláudio de Oliveira Freitas

vito.franzosi@gmail.com

RESUMO: O uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Matemática tem gerado desafios, possibilidades, discussões e decisões importantes para o mundo da educação. Esse é o caso do Aplicativo Multibase, desenvolvido para ser instalado na plataforma Android com o objetivo de levar para o mundo virtual o Material Dourado Montessori. Assim, o Multibase tem como finalidade auxiliar no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos envolvendo a ideia de número, sistema de numeração decimal e operações aritméticas básicas. O objetivo desse trabalho foi investigar como os agrupamentos e desagrupamentos do Aplicativo Multibase podem auxiliar no entendimento das expressões "vai um" e "empresta um" comumente utilizadas nos algoritmos das operações aditivas. Para isso, desenvolvemos com auxílio do Aplicativo Multibase, uma sequência de somas e subtrações com os alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal de Vitória-ES. A pesquisa tem cunho qualitativo, sendo assim, os dados produzidos durante a atividade foram analisados em base aos registros do aplicativo *Screen Recorder*, do Sistema Web Relatório, das imagens audiovisuais e das observações do pesquisador. Identificamos que os agrupamentos das peças virtuais do Aplicativo Multibase podem ajudar na compreensão do significado da expressão "vai um", assim como os desagrupamentos de suas peças podem ajudar na compreensão do significado da expressão "empresta um". Consideramos que o Aplicativo Multibase possa favorecer o ensino de conceitos matemáticos envolvendo as operações aditivas e que o uso desse aplicativo pode ampliar as possibilidades de ensino, uma vez que favorecem descobertas e confirmações de propriedades durante a manipulação de suas peças virtuais.

Palavras-chave: Sistema de numeração decimal. Operações aditivas. Dispositivo móvel e educação matemática.

1. Introdução

As das tecnologias de informação e comunicação (TIC) e das tecnologias móveis (TM) como *tablets* e *smartphones* têm gerado incessantes transformações em organizações e no pensamento humano, revelando novas possibilidades no cotidiano das pessoas de ver, aprender e interpretar o mundo.

Embora em ritmos mais lentos, essas tecnologias estão presentes nas escolas em ambientes de ensino e aprendizagem trazendo novos desafios, possibilidades, discussões e decisões importantes para o universo educacional. Elas são propostas desafiadoras para

as salas de aulas, pois permitem a colaboração entre pessoas próximas e distantes, de modo a ampliar a noção de espaço escolar e integrar os alunos e professores de países, línguas e culturas diferentes.

Se observarmos os documentos oficiais do Governo Federal sobre a Educação, como as Diretrizes Curriculares Nacionais[1] (DCNs) e os Parâmetros Curriculares Nacionais[2] (PCNs) para a área de Matemática, nós perceberemos que TIC e TM são citadas como recursos didáticos importantes no processo de ensino e aprendizagem. Esses documentos recomendam que a escola propicie aos alunos conhecimentos que visam à compreensão e à interação com o mundo em que vivem, ou seja, que a escola trabalhe de forma contextualizada, que faça sentido para os alunos, pois o mundo "requer pessoas preparadas para utilizar diferentes tecnologias e linguagens" (BRASIL, 1997, p. 26).

A nossa pesquisa se insere no contexto do uso de *tablets* para o ensino das operações aditivas. Para isso, desenvolvemos atividades que proporcionassem aos alunos a manipulação das peças virtuais do Aplicativo Multibase (AM) explorando os conceitos de agrupamento e desagrupamento.

O AM foi desenvolvido para ser instalado na plataforma *Android*[3] com o objetivo de levar para o mundo virtual o Material Dourado[4]. Esse recurso didático, criado pela médica e

1 As DCNs são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientam o planejamento curricular das escolas e sistemas de ensino, fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE). As DCNs têm origem na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996, que assinala ser incumbência da União "estabelecer, em colaboração com os Estados, Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e os seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar a formação básica comum.

2 Os PCNs foram elaborados para difundir os princípios da reforma curricular e orientar os professores na busca de novas abordagens e metodologias. Eles traçam um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção dos jovens na vida adulta; orientam os professores quanto ao significado do conhecimento escolar quando contextualizado e quanto à interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender.

3 Android é um sistema operacional baseado no núcleo do Linux para dispositivos móveis, desenvolvido pela Open Handset Alliance, liderada pelo Google e outras empresas.

4 O Material Dourado é um dos muitos materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori para o trabalho com Matemática. Ele foi criado com o intuito de destinar-se a atividades que auxiliassem o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional (unidade, dezena, centena e milhar) e dos métodos para efetuar as operações fundamentais da matemática (soma, subtração, multiplicação e divisão). Essa utilização evoluiu e hoje esse material pode ser utilizado para o estudo de frações, conceituação e cálculo de áreas e volumes, trabalho com números decimais, raiz quadrada, progressão aritmética, progressão geométrica e outras atividades criativas.

educadora italiana Maria Montessori, é utilizado para ensinar conceitos de número, sistema de numeração decimal e operações aritméticas básicas.

O objetivo desse trabalho foi investigar como os agrupamentos e desagrupamentos do AM podem auxiliar no entendimento das expressões, "vai um" e "empresta um", comumente utilizado nos algoritmos das operações aditivas.

A metodologia contempla a perspectiva qualitativa, pois consideramos que há uma relação dinâmica entre o mundo real, o mundo virtual e o sujeito. Essa relação, segundo Bogdan e Biklen (1994), cria um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números

Consideramos que o AM possa favorecer o ensino de conceitos matemáticos envolvendo as operações aditivas, uma vez que o uso desse aplicativo pode ampliar as favorecem descobertas e confirmações de propriedades sobre o conceito de número e sistema de numeração durante manipulação de suas peças.

2. Cálculo e Operações Aditivas

Entendemos que os cálculos e as operações aditivas são aqueles cuja solução exige tão somente a adição e subtração. Dentro das operações aditivas é possível encontrar diferentes situações que são resolvidas por operações distintas, porém todas as situações usam somente as operações de adição e subtração para encontrar a solução.

Um dos instrumentos mais utilizados para resolver as situações problemas das operações aditivas são os algoritmos matemáticos da adição e subtração. Segundo Centurión (2005), o algoritmo é uma sequência de instruções exatas a serem seguidas, passo a passo, para a realização de uma tarefa. Já o cálculo mental são as estratégias utilizadas pela pessoa para realizar uma operação, aproveitando as características dos números e o que já sabe sobre eles.

No entanto é comum, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, “apresentar as crianças certos mecanismos de cálculo e exigir que eles sejam memorizados e utilizados mecanicamente” (DANTE, 1985, p. 29) sem valorizar o papel desses mecanismos de cálculo, isto é, os algoritmos e o significado das operações no Sistema de Numeração Decimal (SND). Compreender a origem do algoritmo e saber o porquê da sua utilização pode torná-lo motivador e estimulante.

> Se a criança percebe porque "vai um" numa adição, porque "empresta um" numa subtração, etc., ela começa a sentir melhor o significado das operações no sistema de numeração decimal e a valorizar mais o papel dos algoritmos. Isso é, para a criança, algo como achar o "fio da meada". Ao contrário, a apresentação dos algoritmos unicamente nas suas formas finais, acabadas e compactas, parece inibir a compreensão e a curiosidade da criança (DANTE, 1985, p. 29).

Entender a função dos algoritmos ajuda o estudante a compreender as características do SND, a ideia de número e as propriedades das operações. Auxilia no entendimento da expressão "vai um" usada na adição, que é um agrupamento de dez unidades da ordem inferior para formar uma unidade da ordem superior.

O mesmo ocorre na percepção da expressão "empresta um" empregada na subtração, isto é, quando é necessário transformar (desagrupar) uma unidade da ordem superior para compor dez unidades da ordem inferior.

> O reflexo do sistema de numeração decimal num algoritmo evidencia-se na decomposição dos números que nele intervêm, na obrigação de trabalhar ordem a ordem e na recomposição ou reagrupamento das unidades de uma determinada ordem quando o seu número é, ou precisamos que passe a ser, igual ou superior a 10 (LOUREIRO, 2004, p. 23).

Compreender os agrupamentos e desagrupamentos ajuda a criança a desenvolver os mecanismos de cálculo para realizar os algoritmos sem exigir que eles sejam memorizados e utilizados mecanicamente. Realizar as operações aritméticas sabendo o porquê das ações executadas favorece o aluno no desenvolvimento do cálculo mental. Isso ocorre porque na utilização

> [...] de qualquer algoritmo há sempre uma componente de cálculo mental. Imaginar que alguém poderá desenvolver o seu poder de cálculo com algoritmos sem desenvolver, previamente e depois em paralelo, as suas capacidades de cálculo mental é comparável a pensar que um atleta se prepara para o pentatlo sem praticar as várias modalidades que o compõem (LOUREIRO, 2004, p. 24).

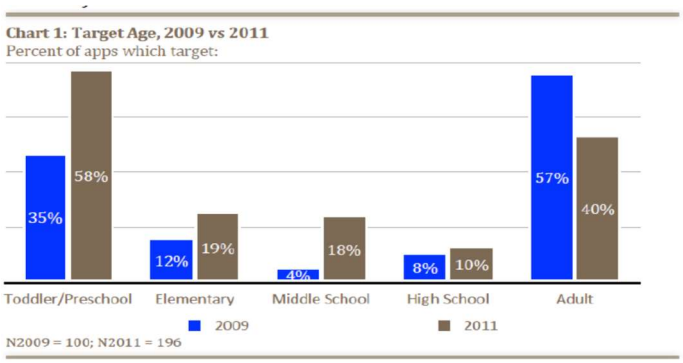
O estudante que executa de forma significativa o cálculo com algoritmos desenvolve a capacidade do cálculo mental, favorece a compreensão do SND e o sentido de número (LOUDEIRO 2004; DANTE 1985). Por outro lado, um ensino sem contextualização dos algoritmos pode "obscurecer a compreensão do sentido das operações" (LOUREIRO, 2004, p. 29).

3. Dispositivos Móveis e Educação Matemática

Até meados da década passada, as manipulações de objetos virtuais só estavam disponíveis através de *softwares* orientados por mouse para computadores *desktop* e *laptop*. Nos últimos anos, os dispositivos de tela sensível ao toque (*touchscreen*) emergiram e com eles surgiram os aplicativos para o ensino da matemática com objetos virtuais manipuláveis.

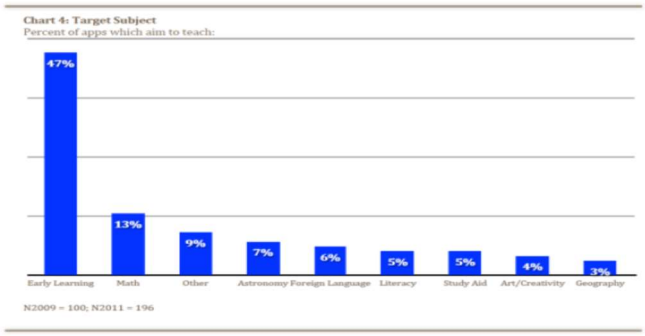
Uma análise, realizada por Shuler, Levine e Ree (2012) na App Store da Apple sobre os aplicativos com características educacionais, revelou que existem mais de 500.000 aplicativos disponíveis no iTunes e mais de 300.000 no Android. Sendo que, 72% dos aplicativos mais vendidos são para crianças da Educação Infantil e do Ensino Fundamental (figura 1) e a segunda temática mais popular dos aplicativos é a matemática com 13% (figura 2).

Figura 3: Crescimento de aplicativos.



Fonte: Shuler; Levine; Ree (2012, p.13)

Figura 2: Classificação por temática.



Fonte: Shuler; Levine; Ree (2012, p.18)

No entanto, Shuler; Levine; Ree (2012) relata que o quantitativo de pesquisas sobre os benefícios que os aplicativos podem oferecer ao processo de ensino e aprendizagem de

conteúdos matemáticos não acompanhou o crescimento exponencial dos aplicativos, conforme destaca Bairral (2013) quando afirma que

> [...] implementar estudos com dispositivos *touchscreen* não é relevante apenas pelo seu aspecto inovador, fashion, mas pela possibilidade de gerarmos resultados que permitam contribuir para a construção de novas práticas educativas com esses ambientes (SANTOS, 2012) e que essas implementações sejam realmente promissoras para a ampliação do repertório e do aprendizado matemático (LEUNG, 2011) nessas interfaces (BAIRRAL, 2013, p. 8).

Dessa forma, enquadramos esta pesquisa como uma possibilidade de geração de resultados que permitam contribuir para a construção de novas práticas educativas com uso de dispositivos móveis *touchscreen*. Para tanto, focamos no ensino de conteúdos matemáticos usando o AM como suporte ao desenvolvimento de atividades envolvendo conceitos de números, agrupamento e desagrupamento, sistema de numeração e operações aditivas.

4. Metodologia

O estudo contempla a perspectiva qualitativa, assume opções metodológicas explicitadas em Bogdan e Biklen (1994), Borba e Araújo (2013). A pesquisa aconteceu na turma do 2º Ano do Ensino Fundamental na Escola Municipal na cidade de Vitória (ES). A produção de dados ocorreu nos meses de agosto a outubro de 2016, contou com os registros do aplicativo *Screen Recorder*[5], dos relatórios gerados pelo Sistema Web Relatório[6] (SWR), dos recursos audiovisuais e das observações do pesquisador, os dados produzidos durante a experimentação em sala de aula.

A combinação das informações geradas por esses instrumentos sustentou a análise dos dados produzidos.

5. Análise dos Dados

5 Screen Recorder: é um aplicativo para Android que permite gravar o conteúdo da tela do smartphone ou tablet em vídeo. Com ele, o usuário pode fazer gravações, seja para tutoriais ou para vídeos com gameplay dos seus jogos favoritos.

6 Sistema Web Relatório: criado para armazenar as ações executadas pelos estudantes no Aplicativo Multibase durante a realização das atividades e transformá-las em relatórios que auxiliem o professor a identificar as estratégias usadas pelos alunos.

Propomos aos alunos a resolução de nove adições e nove subtrações (quadro 1) utilizando a base decimal do AM.

Quadro 1: Adição e subtração como números naturais

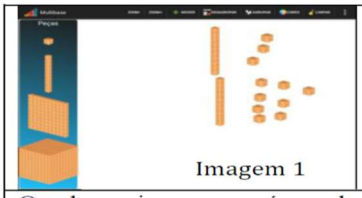
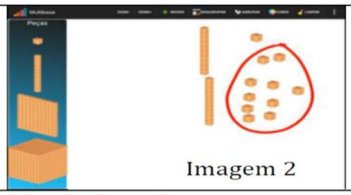
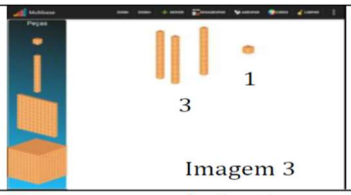
Adição	**Subtração**
13 + 18 = ?	18 – 13 = ?
55 + 63 = ?	63 – 55 = ?
219 + 375 = ?	375 – 219 = ?
743 + 456 = ?	743 – 456 = ?
8 + ? = 15	8 - ? = 3
? + 6 = 18	? – 32 = 23
132 + 418 = ?	62 – 27 = ?
505 + 863 = ?	437 – 218 = ?
1219 + 2375 = ?	825 – 318 = ?

Fonte: Franzosi (2018, p. 105)

Os objetivos conceituais propostos nessa atividade estão associados ao desenvolvimento das operações aditivas e o reconhecimento do significado das expressões “vai um” e “empresta um”.

Na primeira análise, reportamos uma soma operacionalizada pelo Aluno_08 entre os números 13 e 18 (quadro 2). Trazemos o exemplo do Aluno_08, pois dezoito dos seus colegas de classe usaram as mesmas estratégias ou ideias semelhantes para desenvolver essa atividade. Somente três estudantes não conseguiram realizar de imediato essa atividade, porém com a ajuda de outros colegas de turma esses três alunos entenderam o processo.

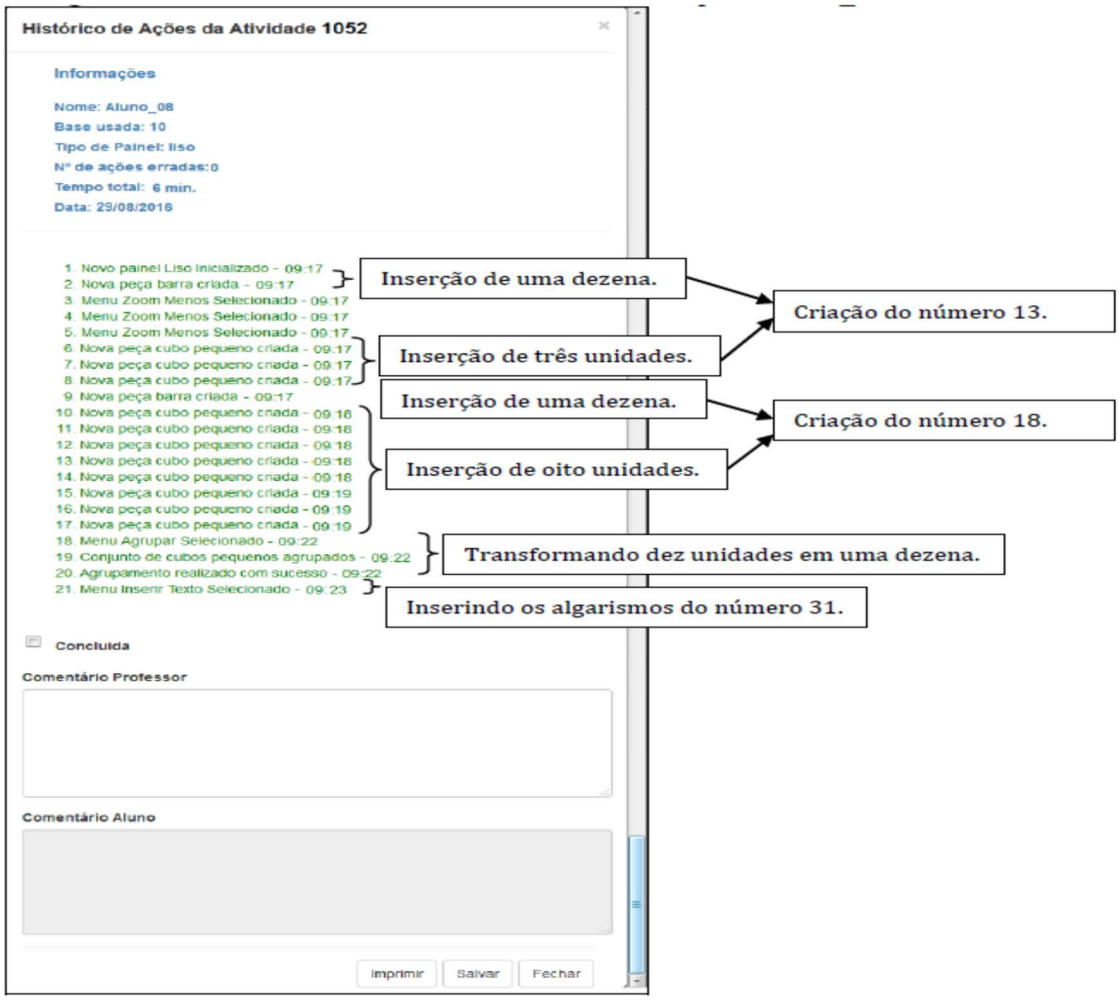
Quadro 2: Soma entre os números 13 e 18

 Imagem 1	 Imagem 2	 Imagem 3
O aluno insere na área de trabalho do AM uma barra e três cubos pequenos $(13)_{10}$. Em seguida ele insere uma barra e oito cubos pequenos $(18)_{10}$ (listagem 2).	Circula dez cubos pequenos para agrupá-los e transformá-los em barra.	Escreve o resultado da soma $(31)_{10}$.

Fonte: Franzosi (2018, p. 106)

Inicialmente, o Aluno_08 inseriu uma barra e três cubos pequenos, representando o número treze 13. Em seguida, ele inseriu outra barra e mais oito cubos pequenos, representando o número dezoito 18. Essas ações podem ser identificadas no relatório 1.

Relatório 1: Soma entre os números 13 e 18



Fonte: Franzosi (2018, p. 107)

Observando a sequência das ações reportadas no relatório 1, percebemos que o Aluno_08 organizou as peças virtuais na área de trabalho do AM em conformidade com a representação numérica escrita do algoritmo da adição que estava acostumado a executar no ambiente papel e lápis.

Outras informações presentes no relatório 1 trazem indicações de que o Aluno_08 inseriu uma barra representando a dezena do número 13 e outra representando a dezena do número 18 (linhas 2 e 9). Nas linhas 6 a 8 e 10 a 17, temos a inserção dos cubos pequenos para representarem as unidades desses respectivos números. Essas ações demonstram que

o aluno já associou a representação da barra com a dezena e a do cubo pequeno com a unidade.

Em seguida, ele efetua a soma entre os números 13 e 18 manipulando as peças virtuais do AM. Para isso, ele agrupa dez cubos pequenos e os transforma em barra (imagem 2 do quadro 2 e relatório 1 linhas 18 a 20). Depois de ter agrupado os dez cubos pequenos, o estudante passou a visualizar na tela do seu *tablet* três barras e um cubo pequeno (imagem 3 do quadro 2), isto é, uma barra a mais do que ele possuía antes do agrupamento.

Essa transformação apresenta indicativos de que os agrupamentos efetuados no AM podem contribuir para o entendimento da expressão "vai um", dado que o estudante, para operacionalizar a adição entre os números 13 e 18, agrupa dez cubos pequenos e obtém uma barra, isto é, ele junta dez peças da ordem inferior para formar uma peça da ordem superior.

O entendimento de que a expressão "vai um" é um agrupamento de dez peças ficou evidenciado nas impressões comunicadas pelos alunos durante o diálogo com a turma (dialogo 1) no desenvolvimento dessa atividade.

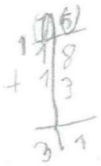
Diálogo 1: Trecho do diálogo com os alunos sobre a expressão "vai um"

Pesquisador: O que vocês fizeram no Aplicativo Multibase para somar 13 com 18?

Aluno_23: Eu agrupei dez cubos pequenos e fiz uma barra e depois escrevi o número trinta e um.

Pesquisador: Agora façam essa soma no caderno de vocês?

Aluno_23: Aqui o resultado



Pesquisador: Quando vocês somaram oito mais três o que aconteceu?

Aluno_12: Oito mais três é onze. Então fica um na unidade e vai um na dezena.

Pesquisador: E quando vocês agruparam os cubos pequenos no tablet na soma entre treze e dezoito, o que aconteceu?

Aluno_16: Os cubos pequenos se transformaram na barra.

Pesquisador: No início nós tínhamos quanta barra?

Aluno_10: Duas barras. Agora temos três.

Aluno_23: A barra é igual o vai um.

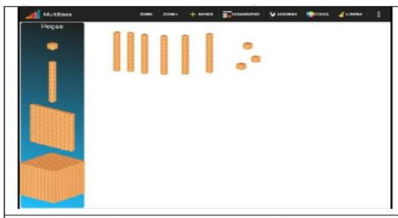
Fonte: Franzosi (2018, p. 109)

Compreender que o agrupamento de dez peças simboliza a expressão "vai um" na adição, pode ajudar o estudante no entendimento das operações no sistema de numeração decimal e na valorização do papel dos algoritmos. Isso porque, os agrupamentos identificados nos cálculos, segundo Centurión (2006, p. 151), favorecem na "compreensão das técnicas

operatórias do algoritmo da adição, pois eles ajudam a justificar as propriedades que estão sendo utilizadas a cada passo”.

Agora analisamos a subtração entre os números 63 e 58 realizada pelo Aluno_11. Se observarmos o quadro 3 podemos averiguar que o estudante utiliza um procedimento diferente do que estava acostumado a praticar com o algoritmo da subtração no ambiente papel e lápis, uma vez que ele inicia a subtração pelas dezenas e não pelas unidades.

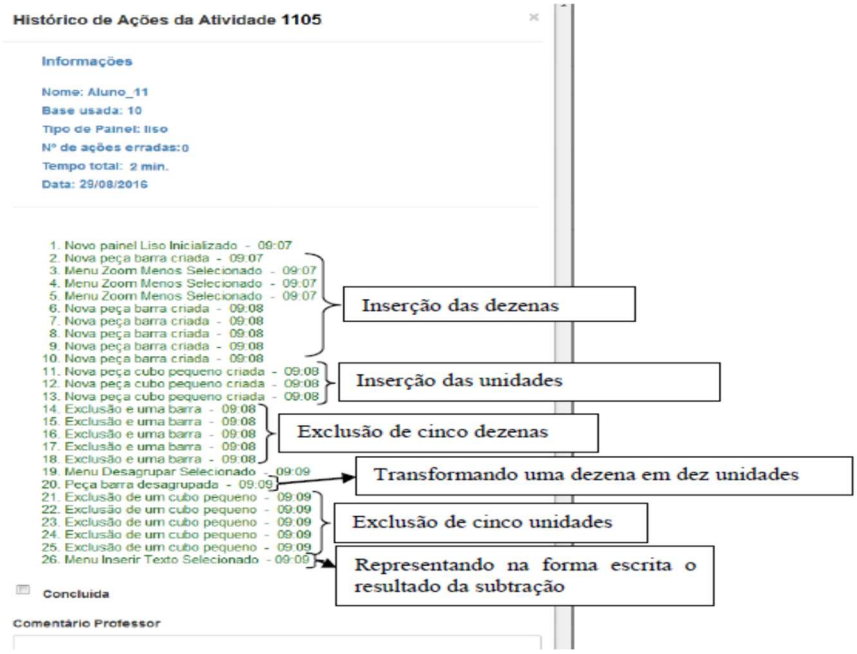
Quadro 3: Subtração entre os números 63 e 58

 imagem 1	imagem 2
O aluno insere na área do AM as seis barras e os três cubos pequenos $(63)_{10}$.	O estudante exclui primeiramente cinco barras, permanecendo com uma barra e três cubos pequenos, isto é, treze unidades $(13)_{10}$.
imagem 3	imagem 4
Desagrupa a barra transformando-a em dez cubos pequenos e inicia a exclusão dos cinco cubos pequenos.	Conclui a exclusão dos cinco cubos pequenos e insere o resultado da subtração.

Fonte: Franzosi (2018 p. 111)

O Aluno_11 exclui cinco barras (imagem 2 do quadro 3 e linhas de 14 a 18 do relatório 2), efetuando assim, a subtração das dezenas 60–50=10. Na tela do *tablet* permanece uma barra e três cubos pequenos (imagem 2 do quadro 3), isto é, uma dezena e três unidades representando o número treze 13. O estudante prossegue as suas interações no AM desagrupando a barra transformado-a em dez cubos pequenos (imagem 3 do quadro 3 e linhas 19 e 20 do relatório 2).

Relatório 2: Subtração entre os números 63 e 58



Fonte: Franzosi (2018, p.113)

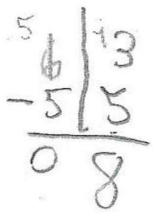
A ação realizada pelo Aluno_11 de transformar a barra em dez cubos pequenos para efetuar a subtração de cinco unidades, pode favorecer a compreensão do significado da expressão “empresta um”, dado que, ao desagrupar a barra o estudante constata o aumento do número de cubos pequenos de dez unidades e só assim ele pode operacionalizar a subtração.

As opiniões transmitidas pelos alunos (diálogo 2) deixam evidências de que eles identificaram que o desagrupamento de uma unidade da ordem superior se transforma em dez unidades da ordem inferior.

Diálogo 2: Trecho do diálogo com os alunos sobre a expressão “empresta um”

Pesquisador: Vamos fazer a subtração entre os números 63 e 55 no caderno?

Aluno_01: A resposta é oito.



Pesquisador: O resultado é o mesmo encontrado no Aplicativo Multibase. Como vocês fizeram essa subtração no tablet?

Aluno_11: Eu joguei no lixo cinco barras e depois separei os cubinhos da barra e joguei no lixo cinco cubinhos.

Pesquisador: A ação de desagrupar a barra em cubos pequenos é a mesma coisa que emprestar um que vocês escreveram no caderno?

Aluno_05: Acho que sim, porque o resultado é igual.

Aluno_23: No caderno eu pego uma dezena do número seis e empresto a unidade fico com treze unidades e no tablet eu separo a barra em cubos pequenos eu fico treze cubos pequenos.

Fonte: Franzosi (2018, p. 114)

No diálogo 2 identificamos que os desagrupamentos podem ajudar na compreensão do significado da expressão “empresta um”, pois na transformação da barra em dez cubos pequenos está subentendida a passagem da ordem da dezena para a ordem da unidade.

As atividades analisadas deram indícios de que as manipulações das peças virtuais no AM, associadas provocações do pesquisador no diálogo com a turma, podem ajudar os estudantes na compreensão de determinado conceito matemático. Para Moyer-Packenham et al. (2015, p. 44), a manipulação de “objetos em um dispositivo de tela sensível ao toque não é um precursor do pensamento matemático - é, em si, pensamento matemático”.

6. Considerações Finais

Neste trabalho investigamos como os agrupamentos e desagrupamentos do AM podem auxiliar no entendimento das expressões, "vai um" e "empresta um", comumente utilizadas nos algoritmos das operações aditivas.

Os agrupamentos realizados no AM estão relacionados às transformações que ocorrem com as peças virtuais de uma ordem inferior para formar uma peça da ordem superior. Essa ideia fornece indicações que remetem ao ensino da operação aditiva e do significado da expressão, “vai um”, comumente utilizado no algoritmo da soma.

O mesmo ocorre quando o estudante tem uma barra e deseja transformá-la em cubos pequenos. No AM ele efetua um desagrupamento da peça de ordem superior transformando-a em peças da ordem inferior. Essa transformação fornece indicações que remetem ao ensino da operação de subtração e do significado da expressão "empresta um" comumente utilizado no algoritmo da subtração.

Identificamos também que as tecnologias favorecem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, na medida em que são associadas a atividades significativas que levam os discentes a ação, reflexão, abstração e formalização do aprendizado.

7. Referências

BAIRRAL, M. A.; As tic e a licenciatura em matemática: em defesa de um currículo focado em processos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.** Vol. 6, n. 1, 2013a, p. 1-20. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/97/87>. Acesso em: 12 jan. de 2017

BOGDAN, R.; BIKLEN, S.; **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 1 ed. Porto: Porto Editora, 1994. p. 336.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.; **Pesquisa qualitativa em educação matemática**, 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2013. p.144.

BRASIL.; Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEF, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em 20 jan. 2017.

_____.; Secretaria de Educação Fundamenta. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em 20 jan. 2017.

CENTURIÓN, M.; **Conteúdo e metodologia da matemática**: Números e Operações. 2ª ed. São Paulo, Scipione, 2006. p. 328.

DANTE, L. R.; Os algoritmos e suas implicações educativas. **Revista de Ensino de Ciências**, n 12, p. 29-35, 1985. Disponível em:

<http://www.cienciamao.usp.br/dados/rec/_osalgoritmosesuasimplica.arquivo.pdf>. Acesso em: 13 mai. 2017

FRANZOSI, V. R.; **Agrupamentos e desagrupamentos no aplicativo multibase: uma proposta de ensino do conceito de número e operações do campo conceitual aditivo**. 2018. 141 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MOYER-PACKENHAM, P. S.; SHUMWAY, J. F.; BULLOCK E.; TUCKER, S. I.; Young Children's Learning Performance and Efficiency when Using Virtual Manipulative Mathematics iPad Apps. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**. Colorado – USA, 2015 n. 34, p. 41-69. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Patricia_Moyer-Packenham/publication/268445370_Young_children's_learning_performance_and_efficiency_when_using_virtual_manipulative_mathematics_iPad_apps/links/573a4b1808aea45ee83f88da/Young-childrens-learning-performance-and-efficiency-when-using-virtual-manipulative-mathematics-iPad-apps.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2017.

LOUREIRO, C.; Em defesa da utilização da calculadora: algoritmos com sentido numérico. **Revista Educação Matemática**, n 77, 2004, p. 22 – 29.

SHULER, C.; LEVINE Z.; REE, J.; iLearn II An Analysis of the Education Category of Apple's App Store. **The Joan Ganz Cooney Center**, 2012. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=46647A8E711713C9BD296758BB86E9BD?doi=10.1.1.362.6454&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 26 jun. 2017;

ENSINO DE FÍSICA E FUNÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UM ENVOLVIMENTO COMPLEXO

Geraldo Bull da Silva Junior, Jeferson Ney

gbulljr@bol.com.br

Resumo: Uma característica da Ciência Moderna é utilizar instrumentos da Matemática para representar um fenômeno que é objeto de outro campo e o usual no ensino tradicional da Física é apresentar conceitos a partir de definições das grandezas envolvidas. Em seguida, generaliza-se suas leis utilizando atividades direcionadas a este fim e, dentro do procedimento usual, o passo seguinte é relacionar uma realidade física percebida aos instrumentos matemáticos disponíveis. Daí podemos observar uma relação entre temas dessas duas Ciências e o presente texto, resultante de uma pesquisa qualitativa de caráter teórico, teve como foco verificar o envolvimento complexo do ensino de dois campos científicos. O pano de fundo é a interseção entre conceitos relativos à função polinomial de primeiro grau e a Cinemática, especificamente o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU). Os dados foram obtidos a partir do exame de livros de Física e da busca de elementos matemáticos correspondentes. A pergunta para a qual procuramos resposta é: existem conceitos do MRU envolvidos de forma complexa com a função polinomial de primeiro grau? O objetivo principal do trabalho é verificar como reconhecer relações complexas entre dois campos que, por si só, têm complexidades intrínsecas. O principal eixo de nosso referencial teórico é ideia de complexidade do conhecimento, que caracteriza o pensamento científico moderno pelo abuso indiscriminado do método analítico, resultando no aprofundamento de especializações científicas que levam ao isolamento e a fragmentações incapazes de expressar soluções globais dentro da mesma Ciência. Tais fragmentações e isolamentos estão presentes nos programas de ensino científico em diferentes níveis e a importância da elaboração complexa e multidimensional do conhecimento está justamente em oposição à disjunção reinante na Ciência Moderna. Uma percepção resultante da pesquisa foi que o ensino científico em geral deve considerar o surgimento de outras complexidades ao confrontar conceitos de diferentes disciplinas (no nosso caso, científicas). Ao invés de resguardar compartimentadamente duas disciplinas, o primeiro passo é considerar ambos sistemas abertos e capazes de trocas entre si.

Palavras-chave: Ensino Científico. Função Polinomial de Primeiro Grau. Cinemática. Conhecimento. Complexidade.

1. Introdução

Uma característica da Ciência Moderna é utilizar equações e funções para apresentar grandezas associadas a um fenômeno estudado pela Física. O ensino tradicional apresenta conceitos físicos a partir de definições de grandezas e passa a generalizar leis utilizando diferentes atividades. Usualmente, o passo seguinte é relacionar a realidade física a instrumentos matemáticos.

O presente trabalho, de característica qualitativa, foi elaborado a partir de uma pesquisa teórica que, conforme Demo (2000), busca reconstruir teorias objetivando aprimorar fundamentos teóricos e diferentes práticas. Voltamo-nos para o ensino científico, com objetivo de discutir se e como podemos associar em relações complexas a função polinomial de primeiro grau e o estudo do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU).

O método científico e a busca contínua de explicação e controle da descrição dos fenômenos físicos contribuíram para a evolução do que hoje conhecemos por função. Por meio do método científico[7] sugerido por Galileu Galilei (1988), a partir da observação de diferentes fenômenos foi possível verificar e descrever regularidades quando são mantidas as condições iniciais. A investigação dessas ocorrências facilita ao físico compreender e explicar aspectos de uma realidade devido à presença de padrões e repetições de ciclos.

Machado (1988, v. 1) considera que o conceito de função é dos mais importantes elaborados para a própria Matemática e outros campos científicos. Do ponto de vista da Física, podemos reconhecer as grandezas que descrevem um fenômeno e a interdependência (ou não) entre elas. Para avançar e elaborar um modelo descritivo é importante quantificar tais grandezas, tornando necessário conhecer e desenvolver a habilidade de aplicar instrumentos matemáticos.

2. Referencial Teórico

Os procedimentos matemáticos resultam de uma evolução ao longo de séculos. De acordo com Ávila (2005), as primeiras ideias sobre funções aparecem no século XIV e, com o passar do tempo, o termo passou a designar uma relação de dependência entre variáveis. Porém, esse campo se desenvolveu mais rapidamente a partir do século XVII, enlaçado à Geometria Analítica. A utilização de variáveis e incógnitas associadas a eixos coordenados proporciona uma representação simbólica e resolução de problemas de maneira mais conveniente.

A partir desses indícios compreendemos que tratamos de um campo cujo desenvolvimento tornou-o cada vez mais complexo, fato também ocorrido com a Física.

7 Observação, experimentação e comprovação.

Daí necessitarmos de um referencial teórico que auxilie na compreensão de como articular complexidades de diferentes campos ao invés de fragmentar o estudo de um fenômeno, comportamento característico da Ciência Moderna. Discutimos isso a partir da intervenção do primeiro componente do nosso referencial teórico: Morin (2006). Ele parte da ideia de elaboração do conhecimento como resultado da escolha do tema, do método de trabalho e dos meios de legá-lo à posteridade, ou seja, de um paradigma.

O autor caracteriza o paradigma científico moderno pelo uso da análise como elemento essencial, concretizado na subdivisão de um problema com objetivo de resolvê-lo a partir de partes menores e de baixa complexidade, permitindo enfrentá-las mais rapidamente. Porém, aplicar tal procedimento não garante compreender como os diferentes fragmentos relacionam-se com o contexto maior do qual cada um deles emerge. O método analítico levou às especializações científicas cada vez mais aprofundadas, fazendo com que resultados isolados em campos fragmentados não expressem soluções globais da mesma Ciência. A elaboração de conhecimento deve dar-se de forma complexa, tratando o objeto de forma multidimensional, comportamento oposto à disjunção científica Moderna (MORIN 2006).

A consideração da complexidade não elimina a necessidade momentânea da simplificação e da disjunção, de forma localizada. É necessário integrar elementos dispersos e ligar análises unidimensionais. Considerar individualmente os resultados instrumentaliza a fragmentação de pensamento e, portanto, esse método não pode ser instrumento único de pensamento. Seu uso excessivo tende a diluir contextos dos quais as partes foram separadas pelo método analítico.

Também não se deve tratar um objeto apenas pela aparência do todo. Dessa forma não se percebem elementos geradores de complexidade, levando a outra forma de simplificação: o holismo. Atitude complexa requer tratar o conhecimento sem conduzi-lo a um enfoque científico fragmentário. O primeiro passo é considerar cada saber um sistema aberto, capaz de trocas com o exterior que levam desequilíbrios que possibilitam diversas interferências. Isso é contraposição à ideia de criar sistemas fechados em equilíbrio indiferente ao meio, levando a um processo no qual aquilo "[...] que se aprende sobre as qualidades emergentes do todo [...] volta-se sobre as partes […] pode-se enriquecer o conhecimento das partes pelo todo e do todo pelas partes [...]" (MORIN, 2006, p. 75).

Reconhecer que diferentes identidades científicas não são inconciliáveis possibilita aos envolvidos deixar o papel de fiscalizadores de fronteiras e, ao mesmo tempo, assumir o

papel de negociadores de significados comuns. Ao invés de formular simplificações, devemos ligar saberes, enriquecendo sentidos, tendo em vista que conceitos

> […] viajam e é melhor [...] que não viajem clandestinamente. É bom […] que eles viajem sem serem percebidos pelos aduaneiros [...] a circulação clandestina dos conceitos [...] permitiu às disciplinas respirar [...] a ciência estaria totalmente atravancada se os conceitos não migrassem clandestinamente (MORIN, 2006, p. 117).

Diferentes Ciências são permeadas por relações funcionais. Podemos destacar a cinemática, cujo desenvolvimento é estruturado pelo uso de funções. Nesse contexto, Caraça (1963) é outro autor importante. Ele considera as funções como instrumentos para o estudo das leis de uma Ciência e enfatiza que esse conceito pode ser abordado a partir de ideias de correspondência, dependência entre grandezas e variáveis, regularidades e taxa de variação das variáveis.

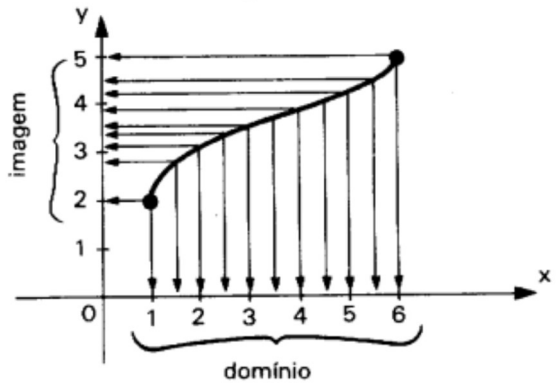
A busca por explicações sobre fenômenos da natureza também contribuiu para sistematizar conceitos associados às funções. Historicamente isso está associado à relação quantitativa entre grandezas físicas. Associações matemáticas aos fenômenos físicos foram elementos de busca, evolução e sistematização de conceitos. Quando o físico, por exemplo, necessita explicar a evolução quantitativa de um fenômeno, pode construir tabelas e gráficos ao formular leis. Ele atribui valores às grandezas e define de que forma variam. A observação e a descrição podem levar à sistematização de dados em quadros compostos por resultados que confirmam (ou não) elaborações teóricas por observação ou experimentação (CARAÇA, 1963).

A abordagem conceitual de correspondências entre variáveis físicas, dependentes ou independentes, abre caminhos para estruturar um saber não compartimentado. Pietrocola (2002, p. 109) é o terceiro autor em nosso referencial e, para ele, "conceitos são ideias estabilizadas pelo uso e 'tijolos' do pensamento científico [...] todavia, estes conceitos sozinhos nada podem e só ganham sentido quando vinculados uns aos outros". Abordagens de fenômenos físicos entrelaçados a conceitos da Matemática propiciam sustentar saberes mutuamente, ao considerar aspectos qualitativos e quantitativos, complementando e dando significado à totalidade do objeto.

3. Conceitos: Função e Função Polinomial de Primeiro Grau

Para confirmar o trânsito do conceito de função no ensino de áreas Ciências fora da Matemática podemos observar, por exemplo, os livros das áreas de Biologia, Física e Química. Percebe-se a relevância do conteúdo e que seu ensino não deve limitar-se às especificidades internas à Matemática, pois ela pode interferir no desenvolvimento de diferentes campos.

Figura 1: Gráfico de uma função.



Destacados o domínio, números reais de 1 a 6 e o conjunto imagem, números reais de 2 a 5. A cada abscissa (x) corresponde apenas uma ordenada (y).

Fonte: BIANCHINI e PACCOLA, v. 1,1992

Dada uma função $\boldsymbol{f}$, nos pares ordenados (x,y) representados por pontos no plano cartesiano, o valor de x pertence ao domínio e y à imagem. A figura 1, extraída de Bianchini e Paccola (1992, p. 52), representa uma função particular, com domínio e imagens reais sobre os eixos coordenados.

Uma função $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{IR} \rightarrow \boldsymbol{IR}$ é denominada polinomial de primeiro grau quando existem constantes reais a e b tais que $\boldsymbol{f}(x) = ax + b$, $\forall$ x, x $\in$ $\boldsymbol{IR}$. De acordo com a definição, pode-se observar uma relação entre x (variável independente, capaz de assumir qualquer valor real) e $\boldsymbol{f}(x)$ (variável dependente de x). No caso particular em que b = 0, a função também é chamada de linear.

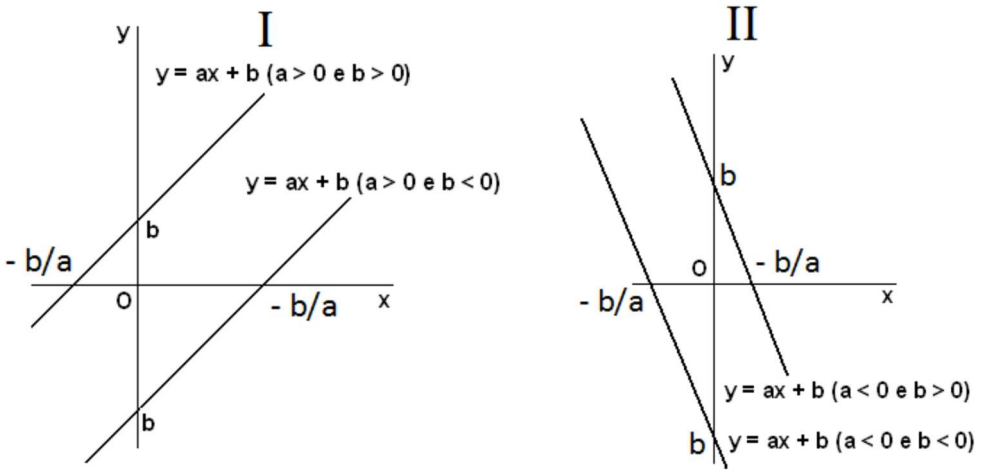
O gráfico de uma função polinomial de primeiro grau é uma reta, com domínio e imagem subconjuntos dos números reais. Por se tratar desse tipo de figura, necessitamos apenas dois pontos para construir seu gráfico cartesiano. O ponto em que a reta intercepta o eixo Ox tem como abscissa o valor da raiz (ou zero) da função. Como os pontos no eixo das abscissas têm ordenada nula, fazemos:

$$0 = ax + b \rightarrow -b = ax \rightarrow x = -b/a.$$

A constante *b*, também chamada coeficiente linear, é ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy. Como os pontos no eixo das ordenadas têm abscissa nula, fazemos:

$$\boldsymbol{f}(0) = a.0 + b \rightarrow \boldsymbol{f}(0) = 0 + b \rightarrow \boldsymbol{f}(0) = b$$

Figura 2: As duas retas em I representam funções crescentes. As duas retas em II representam funções decrescentes.



Fonte: Os Autores

O coeficiente *a*, também denominado coeficiente angular, está relacionado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox. A figura 2 apresenta diferentes posições da reta que representa uma função polinomial de primeiro grau. Na parte I estão duas funções crescentes (a > 0) e, na II, elas são decrescentes (a < 0). O valor de *b* indica a interseção da reta com o eixo das ordenadas (eixo "y").

As variáveis associadas às grandezas físicas são os elementos suscetíveis a avaliação e são expressas em padrões previamente definidos estabelecidos pela comunidade científica. Cada grandeza é expressa por um número acompanhado de uma unidade de medida, também estabelecida por definição. A velocidade de um móvel, por exemplo, pode ser variável em uma função polinomial de primeiro grau, mas quando constante, representa um valor fixo.

O conceito de variável física é relacionado a aspectos, propriedades e características individuais (ou fatores observáveis) e mensuráveis de um fenômeno. A variável dependente representa um efeito (resultado, consequência) de algo estimulado a variar. Ela não é manipulável e sim efeito observado como resultado da variação da variável independente. A variável independente é fator determinante para ocorrer um resultado (condição ou causa para um efeito).

As grandezas relacionadas ao estudo do movimento são comprimento (distância), tempo e velocidade. No MRU a velocidade do móvel é constante, pelo fato dele percorrer distâncias iguais em intervalos de tempos iguais. Distância e tempo são, respectivamente, variáveis dependente e independente (importantes para descrever um movimento em uma trajetória) e podem ser relacionadas por meio de uma função polinomial de primeiro grau.

4. O Ensino da Cinemática a Função Polinomial de Primeiro Grau

No ensino de Matemática, a abordagem dessa função pode ocorrer a partir da definição e afirmando que as variáveis representam grandezas. Ao abordar conteúdos de Cinemática, variáveis e constantes são assumidas como grandezas físicas, tendo papel relevante na compreensão qualitativa e quantitativa dos movimentos de corpos.

O ensino do MRU aborda conceitos relacionados aos movimentos dos corpos: posição, distância, velocidade e tempo. Após definir essas grandezas é usual apresentar a função

$$S(t) = S_0 + v.t \text{ (função horária da posição do MRU)}$$

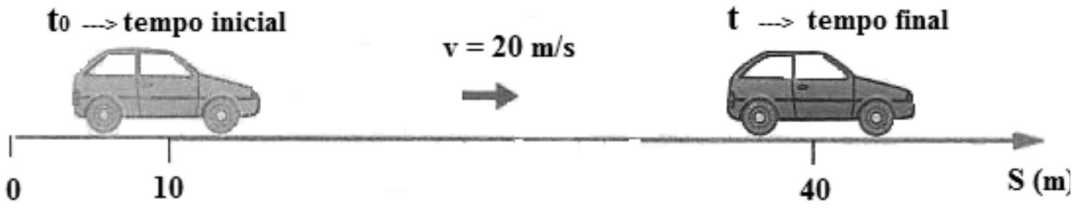
Objetos de ensino da Matemática, variáveis (dependentes e independentes) e constantes aqui adquirem realidade física, apresentando explicitamente conceitos da cinemática e, implicitamente, a função polinomial de primeiro grau. Um exemplo de trânsito entre realidades é possível a abordagem do conceito de trajetória.

Neste caso, o instrumento matemático utilizado pela Física é um dos pontos de convergência entre dois campos científicos. O contexto de aplicação da função na Física mostra a necessidade de tratar o conhecimento como algo complexo, permitindo perceber multidimensionalidades no que é tratado de forma disjuntiva pela Ciência Moderna (MORIN, 2006).

Trajetória é uma palavra-chave e, a partir dela, podemos criar correspondências para compreender conceitos de cinemática escalar e função polinomial de primeiro grau. Inicialmente, o móvel representado na figura 3 se desloca com velocidade constante no

mesmo sentido de orientação da trajetória (*movimento progressivo*) iniciando o

Figura 3: Móvel deslocando-se em MRU.



Fonte: Os autores.

movimento no marco 10 m.No instante $t_0 = 0$ s o móvel está na posição inicial $S_0 = 10$ m e chegará à posição final S em um instante final t. As variáveis dependente e independente e as constantes podem ser explicitadas na seguinte função polinomial de primeiro grau:

$$S(t) = 10 + 20.t$$

No exemplo, podemos perceber uma associação entre a posição S (variável dependente no primeiro membro da igualdade) na trajetória e o tempo t (variável independente, no segundo membro) necessário para alcançar essa posição. Sempre que o móvel ocupar uma posição na trajetória haverá um tempo correspondente. Logo, estabeleceu-se uma relação de causa e efeito ($t \rightarrow S$). É importante perceber tal correspondência, fundamental para descrever o movimento ao longo da trajetória.

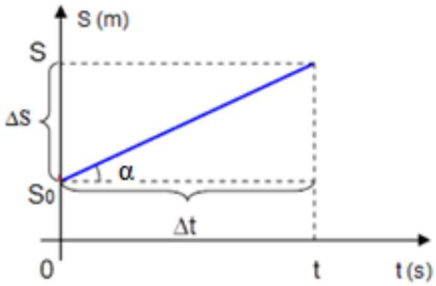
No exemplo, a Física encontra-se permeada por uma relação funcional. A apresentação da Cinemática é estruturada por uma função, a partir da correspondência e dependência entre grandezas e variáveis (CARAÇA, 1963). Especificamente na realidade física (MRU), o coeficiente angular (inclinação da reta) representa o módulo e o sentido da velocidade *v* do móvel. Quanto maior o módulo da velocidade, maior o coeficiente angular. O sinal de *v* indica o sentido do deslocamento do móvel na trajetória: se é no sentido crescente ($v > 0$, função crescente); se é no sentido decrescente, ($v < 0$, função decrescente). O termo independente indica a posição inicial S_0 do móvel onde ele iniciou o movimento (posição inicial).

Aqui encontramos convergência com o pensamento de Pietrocola (2002). O conceito de movimento progressivo (ou retrógrado) é estabilizado mediante o uso de "tijolos" matemáticos. É perceptível os conceitos tratados conjuntamente ganharem sentido na percepção de vínculos entre si.

As constantes envolvidas no movimento da figura 3, importantes na sua descrição, indicam o modelo matemático usado. Como no MRU o móvel percorre distâncias iguais

em intervalos de tempos iguais, sua velocidade é constante e a função polinomial de primeiro grau é modelo adequado à sua descrição. Isso é corroborado pelo *Teorema da Caracterização de uma Função Polinomial de Primeiro Grau*: em determinadas condições, se a taxa de variação da função (de variável independente t) for constante (não depender de t), utilizaremos essa função. Nesse contexto, posição inicial (S_0) e velocidade (v), constantes presentes na função representam informações sobre a realidade física.

Figura 4: O gráfico S x t representa móvel deslocando-se em MRU.



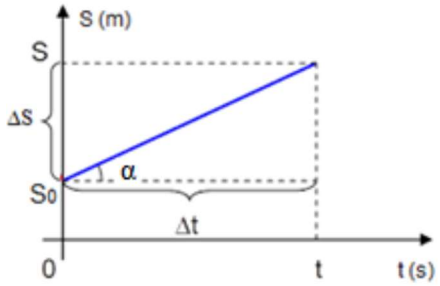
Fonte: Os autores.

O MRU de um móvel também pode ser descrito por um gráfico da função polinomial de primeiro grau. Esse referencial da realidade matemática pode conduzir a uma interpretação rápida do movimento do móvel, permitindo compreender e visualizar imediatamente detalhes, informar as posições ocupadas e expressar a relação funcional entre distância e tempo.

O gráfico da posição pelo tempo (S x t) da figura 4 representa um móvel qualquer em MRU. O eixo das ordenadas ("y") indica a grandeza física distância (variação da posição do móvel - símbolo: S; eixo "S"). O eixo das abcissas ("x") indica a grandeza física grandeza física tempo – símbolo: t; eixo "t"). No eixo "S" podemos notar as posições inicial (S_0) e final (S) do móvel no tempo (t). Para identificar a posição inicial do móvel na trajetória basta observar o ponto onde a semirreta tem origem no eixo "S". Na verdade, geometricamente temos uma semirreta. Observando a inclinação, nota-se que temos uma função crescente com velocidade $v > 0$ (coeficiente angular). Trata-se de movimento progressivo. O valor da velocidade é obtido dividindo a variação da posição ΔS pela variação do tempo Δt ($v = \Delta S/\Delta t$).

Descrever o movimento por meio de uma abordagem gráfica implica ressaltar como identificar e extrair importantes informações sobre a trajetória: 1) *posição inicial*; 2) *tipo de movimento* (progressivo ou retrógrado); 3) valor da *velocidade;* 4) *instante* t em que o móvel passa pela origem da trajetória: (S,t) ≡ (0,0). A partir da posição inicial e velocidade é possível escrever a função que descreve o movimento. O eixo "S" representa valores na trajetória onde o móvel se desloca. No MRU o domínio (no eixo "t") pertence ao conjunto dos números reais não negativos, $t \geq 0$, ($t \in \boldsymbol{IR}_+$).

Figura 5: O gráfico S x t representa o MRU do Móvel da figura 3.



Fonte: Os autores.

O gráfico da figura 5 representa o movimento do móvel descrito na Fig. 3. Observando-o, pode-se identificar e extrair informações. No eixo "S": posição inicial $S_0 = 10$m (ponto onde a curva intercepta o eixo "S") e final S = 40 m. Pela inclinação da reta pode-se notar que a função é crescente (v > 0) e o movimento é progressivo, com velocidade

$$v = \Delta S/\Delta t;\ v = (S - S_0)/(t - t_0);\ v = (40 - 10)/(1{,}5 - 0);\ v = 20 \text{ m/s}.$$

O cálculo da velocidade acima coincide com a obtenção do coeficiente angular "m" de uma reta, dados os pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$. O valor de m corresponde à tangente do ângulo α entre o eixo das abscissas e a reta que representa graficamente a função:

$$\text{tg } \alpha = m = (y_B - y_A)/(x_B - x_A).$$

Aqui existe outra convergência entre temas de Matemática e Física. Na figura 5 identificamos o instante em que o móvel passa pela origem *da trajetória*. Deve-se observar o ponto onde a semirreta intercepta o eixo "t". Neste caso, o móvel não passou pelo marco zero quando t = 0. Tanto na abordagem analítica como na gráfica, as realidades matemática e física relacionam a função polinomial de primeiro grau à descrição de determinado movimento.

Utilizando informações sobre o movimento em uma trajetória retilínea pode-se estabelecer a posição inicial S_0, a velocidade v do móvel e escrever uma função que descreve esse movimento. Reciprocamente, explicitada a função que descreve o movimento, ele identificaria a posição inicial S_0 e o módulo da velocidade v.

As abordagens analítica e gráfica propiciam compreender os conceitos do MRU, exemplificando conceitos referentes às funções e integrando as realidades física e matemática. Associando ensino de Física e Matemática abrindo mão de compartimentalizar e ligando saberes ao invés de abordá-los de maneira simplificada, permite-se aos conceitos "viajar como não clandestinos sem serem percebidos por aduaneiros" (MORIN, 2006).

5. Considerações Finais

A especialização de conhecimentos e linguagens, tratando a realidade de modo pulverizado e fragmentado, dificulta vê-la em seus múltiplos aspectos, excluindo até mesmo a crítica do saber acumulado. Em um ensino estritamente disciplinar, o saber de um campo não deve interferir nem auxiliar o desenvolvimento de outro. Quando muito, trata-se de pré-requisito. Uma alternativa a essa ideia é buscar temas capazes de enredar conhecimento, ampliando abrangências e permitindo trânsito mais fluido entre fronteiras disciplinares.

O presente texto apresentou apenas uma possibilidade: o MRU e a função polinomial de primeiro grau associando as realidades da física e matemática. Podemos observar que é possível entrelaçar duas complexidades, fazendo emergir uma nova, que trata o conhecimento científico ressaltando a reciprocidade de conceitos provenientes de diferentes realidades. A possibilidade de elaborar o conhecimento da Física de posse de conceitos matemáticos (tais como as noções de variáveis dependentes e independentes) permite a apropriação de diferentes conceitos.

Ao mesmo tempo em que se mobilizam conceitos da Matemática em contextos diferentes daqueles oriundos da própria Ciência, pode-se obter na Física novos significados para o conhecimento matemático. O primeiro passo é considerar que ambos os campos são sistemas abertos e capazes de trocas entre si. Consegue-se assim, integrar elementos dispersos por análises unidimensionais de cada área e, simultaneamente, enriquecer cada parte pelo todo e o todo por cada uma das partes envolvidas. O tratamento não interfere

na necessidade de cada campo manter-se estável como corpo de conhecimentos e permite resguardar identidades próprias.

Assim, o ensino da Matemática e da Física não necessitam ser encerrados em unidades reducionistas nem tratados como dois elos em uma cadeia de saberes, como na perspectiva usual de ensinar instrumentos matemáticos necessários à abordagem de um contexto físico como pré-requisitos. Temos uma alternativa que, ao mesmo tempo, é epistemológica e didática, uma alternativa à relação de causalidade linear típica do pensamento analítico consolidado na Ciência Moderna e suas consequências pedagógicas.

O trânsito entre complexidades que geram novas complexidades no encontro entre saberes distintos também pode ajudar a desenvolver as capacidades de sintetizar, resolver problemas e associar saberes, mas é necessário avaliar a contribuição que se deseja de cada campo. É importante adequar ações a objetivos próprios de cada área, sem forçar a reunião de diferentes conhecimentos, que levaria à perda da identidade de qualquer um deles. Podemos agir de forma localizada e viabilizar diálogos a partir de objetos comuns.

Consideramos que assimilar conteúdo de uma disciplina é tão necessário quanto saber associá-los a outros campos, expandindo uma rede na qual são inseridos e impregnando relações ao invés resguardá-las de forma compartimentada. O pensamento complexo, apoiando a elaboração de redes, pode encaminhar novas alternativas pedagógicas e gerar inovações no pensar e agir no ensino científico.

Articular saberes de forma complexa entre disciplinas pode ultrapassar a adoção de que justapõem programas afins. Estudar temas em ações conjuntas não resulta necessariamente na criação de novos campos de estudos, mas pode contribuir para desfazer o mito de que existem conhecimentos necessariamente separados por barreiras intransponíveis.

6. Referências

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para a licenciatura.** 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática. v. 1.** São Paulo: Moderna, 1992.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa, 1963.

DEMO, P. **Metodologia do conhecimento científico.** São Paulo: Atlas, 2000.

GALILEI, G. **Duas novas ciências.** São Paulo: Nova Stella. 1988.

MACHADO, N. J. **Coleção Matemática por assunto. v.1.** São Paulo: Scipione, 1988.

MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

PIETROCOLA, M. A Matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 19, n. 1, p. 89-109, ago. 2002.

ESTUDANTES COM AH/SD E O TALENTO LÓGICO-MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE PRÁTICAS DE VALORIZAÇÃO DO SEU POTENCIAL NO IFES

Isabelle Bueno, Edmar Reis Thiengo

belle_bueno@hotmail.com

Resumo: Neste texto apresentamos um recorte inicial de uma pesquisa de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, que tem como principal objetivo problematizar as alternativas de valorização do potencial dos alunos com Altas Habilidades/Superdotação – AH/SD e Talento Lógico-Matemático, do Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Vitória. Para tanto, buscamos uma aproximação com o Núcleo de Atendimento às Pessoas com Necessidades Específicas - NAPNE, com a intenção de buscar alternativas de encaminhamento pedagógico que possam contribuir com o desenvolvimento do potencial talentoso dos alunos com indicativos de AH/SD e Talento Lógico-Matemático. Para isso, se faz necessário o aprofundamento de estudos relacionados à construção de aprendizagem sob a ótica histórico-cultural, tendo como referencial teórico Vygotsky (1994), pois entendemos as AH/SD como condições construídas pela interação de fatores biológicos e experiências mediadas com o ambiente. As discussões pertinentes, a sua caracterização e identificação dos alunos com Talento Lógico-Matemático foram subsidiadas, principalmente, por Guenther (2012) e Howard Gardner (1994). Ao tratar dos sujeitos envolvidos na pesquisa, os alunos do primeiro ano do ensino médio do IFES, ressaltamos que serão identificados por meio do Modelo das Portas Giratórias para a formação do Pool de Talentos – método subsidiado por Renzulli (2004).

Palavras-chave: Altas Habilidades/Superdotação – AH/SD. Talento Lógico-Matemático. Modelo Portas Giratórias.

1. Introdução

O presente estudo tem o compromisso de fomentar práticas de inclusão de alunos com Altas Habilidades/Superdotação – AH/SD[8] no ambiente escolar. Portanto, iniciamos este caminho propondo criar alternativas para a seguinte problemática: Que práticas pedagógicas e atividades de valorização do talento podem ser desenvolvidas junto a alunos com AH/SD, particularmente o Talento Lógico-Matemático, no IFES – Campus Vitória?

Considerando a importância de explorar novas possibilidades de ensino-aprendizagem e oferecer uma educação plena e de qualidade para os indivíduos com AH/SD, a pesquisa aqui, apresentada, tem a intenção criar espaços de incentivo e desenvolvimento de

[8] Utilizaremos a sigla AH/SD para Altas Habilidades/Superdotação.

possíveis potenciais na área logico-matemática, objetivando a criação de estratégias de ensino que fomentem os interesses dos alunos.

Assim sendo, caracteriza-se como objetivo geral do trabalho problematizar as alternativas de valorização do potencial dos alunos com AH/SD e Talento Lógico-Matemático do IFES. Para alcançá-lo, se faz necessário ter como prioridade o objetivo específico de identificar os alunos com AH/SD e indicativos de Talento Lógico-Matemático, além de discutir o trabalho realizado pela instituição junto a esses alunos e analisar as atividades e propostas de trabalho que contemplam o desenvolvimento das potencialidades dos alunos. Assim sendo, elegemos as turmas do primeiro ano do ensino médio, onde realizaremos as pesquisas e intervenções. Nossa escolha está atrelada ao fato desses alunos estarem recém-chegados ao Ifes, onde poderemos também explorar suas expectativas em relação a instituição.

Fundamentamos a relevância deste trabalho pelo direito à Educação aos alunos com indicativos de AH/SD que está previsto nas políticas públicas do país, tendo as primeiras menções a esse público ainda na década de 70, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LDB, 5.692/71 (BRASIL, 1971) e em legislações pertinentes à área.

Assim sendo, o processo de escolarização desses sujeitos tem se tornado um desafio para os professores, pois esses alunos possuem características fora do padrão da classe e muitas vezes necessitam de atividades suplementares para desenvolver suas capacidades superiores. No contexto escolar, o aluno que apresenta o desempenho acima da média, sobressaindo- se perante a sua turma, na maioria das vezes, é reconhecido pelo seu potencial superior. Entretanto, de maneira geral, são oferecidas poucas oportunidades de incremento de suas habilidades.

Desse modo, é importante considerar e valorizar espaço do Ifes como público, potencializador de talento, vivência e aprendizagem para alunos com AH/SD e Talento Lógico-Matemático. Sobre essa ótica, estimular e sistematizar o atendimento especializado para esse segmento educacional pressupõe em capacitar os professores e, principalmente, em encorajar os alunos a participar de atividades investigativas, que resultem na exposição de seus talentos, que podem contribuir de maneira significativa para o crescimento do país.

2. Quem são os Indivíduos com AH/SD e Talento Lógico-Matemático?

Ao tratar de superdotação é importante perceber que sua definição está relacionada às pessoas que possuem desempenho e habilidades superiores a uma média, em qualquer área de atuação humana. É esse o fator que os diferenciam dos demais.

Por conseguinte, fica claro que essa percepção muito tem a ver com o contexto histórico e cultural em que os indivíduos se encontram. Vamos tomar como exemplo um índio[9], considerado como prodígio por seus pares na tribo onde vive. Esse mesmo indivíduo nunca teve contato com a nossa sociedade e com a maneira com que ela está configurada atualmente; é retirado de sua tribo e colocado para designar funções importantes aqui, como prestar vestibular para uma renomada universidade ou desempenhar papéis de liderança em uma grande empresa. Ele teria sucesso nessas atividades? Certamente não, o que não quer dizer que ele não possa ser considerado um indivíduo com habilidades superiores, uma vez que seus pares assim o consideram, pois em sua tribo ele é uma grande liderança, desenvolveu técnicas apuradas para caçar os animais, sabe fazer armadilhas com maestria, constrói ocas mais resistentes e elaboradas do que os demais índios. Enfim, quando tratamos de uma ótica histórica e cultural, essa é uma questão subjetiva.

No Brasil, a pesquisadora Guenther (2000) é considerada referência na educação de estudantes com AH/SD. Em suas pesquisas aponta que embora não seja simples conceituar talento em termos apropriados, ele em si é facilmente reconhecido no contexto das interações entre as pessoas. A autora completa dizendo que o talento sendo considerado como uma capacidade notavelmente, elevada, está fortemente ancorado em valores vigentes em um determinado momento histórico e em conceitos estabelecidos por um referencial diretamente relacionado ao que aquela cultura em particular valoriza e aprecia.

> Talentosa é a pessoa que realiza com alto grau de qualidade, alcançando reconhecido sucesso, algo que representa expressão de uma característica que a sociedade reconhece e aprecia, ou desempenha em nível de qualidade superior em alguma área que a sociedade valoriza.
> A escala de valores da própria sociedade, dentro do contexto e momento histórico, por valorizar algumas características e ignorar outras, propicia o desenvolvimento de alguns tipos de talento e causa a inibição de outros (GUENTHER, 2000, p. 27-28).

[9] A escolha do personagem foi utilizada apenas para ilustrar a narrativa, sem a intenção de desvalorizar sua etnia e cultura perante as demais.

Apesar de aparentemente parecer uma questão simples, muitos aspectos devem ser considerados na busca da definição da superdotação. Guenther ressalta a existência de sinais captáveis e atributos a serem observados nessas pessoas. A "classificação" desses talentos mostra que os indivíduos superdotados não são bons em todas as áreas do conhecimento e que as habilidades podem ocorrer de forma isolada ou em conjunto com outras. A autora classifica o potencial superior em: Inteligência e Capacidade Geral, Talento Acadêmico, Criatividade, Talento Psicossocial e Talento Psicomotor.

Partindo para a perspectiva das Inteligências Múltiplas, Howard Gardner (1994) apresentou há trinta e quatro anos atrás sua teoria e revolucionou a forma como era concebida a inteligência humana. Nela, o teórico evidencia a ideia de que existem vários tipos de inteligência e que ela pode manifestar-se unicamente ou em concordância com outras, sendo que cada indivíduo pode desenvolvê-las de maneiras diferentes.

> No que segue, indico que há evidências persuasivas pra a existência de diversas competências intelectuais humanas *relativamente autônomas* abreviadas daqui em diante como "inteligências humanas". [...]. parece-me estar cada vez mais difícil negar a convicção de que há pelos menos algumas inteligências, que estas são relativamente independentes umas das outras e que podem ser modeladas e combinadas numa multiplicidade de maneiras adaptativas por indivíduos e culturas (GARDNER, 1994, p. 7).

Ao criar essa nova teoria acerca da inteligência humana, Gardner pretendia ampliar o alcance do potencial humano para além dos testes de Q.I. Em suas obras é possível observar que ele questiona a prática de se determinar a inteligência de um indivíduo tirando-o de seu meio natural e pedindo que responda questões que estão fora do contexto de sua realidade, evidenciando que os testes de papel não são as formas mais assertivas de identificar e atribuir valores a inteligência. Por isso, ele sugere que a inteligência tem muito mais a ver com a capacidade de resolver problemas e criar produtos em ambientes com contextos ricos e naturais.

De acordo com essa concepção, o indivíduo pode apresentar altos níveis de desenvolvimento em uma área específica e estar abaixo da média em outra. À luz da sua teoria é possível observá-la operante no dia a dia das pessoas de várias maneiras. Sendo assim, ele as descreve da seguinte forma: linguística, lógico-matemática, espacial, corporal-cinestésica, musical, interpessoal, intrapessoal e naturalista.

Tratando especificamente de nossa pesquisa, iremos explorar a Inteligência Lógico-Matemática, caracterizada por Gardner (1994) como uma singular paixão pela abstração.

Ressalta que assim como um pintor ou poeta, o matemático é um criador de padrões. De acordo com o teórico (1994, p. 108) "a característica mais central e menos substituível do talento matemático é a capacidade de manejar habilmente longas cadeias de raciocínio".

Campbell, Campbell e Dickinson (2000), evidenciam que a Inteligência Lógico-Matemática possui vários componentes: cálculos matemáticos, raciocínio lógico, resolução de problemas, raciocínio dedutivo e indutivo e discernimento de padrões. Os autores completam afirmando que no centro da capacidade matemática está a capacidade de reconhecer e resolver problemas e deixam claro que apesar dessa inteligência ser muito valorizada pela sociedade, ela não é superior às outras.

Joseph Renzulli, por sua vez, criou a Teoria dos Três Anéis, que dá suporte para pressupostos, filosóficos e evidencia o Modelo de Enriquecimento Escolar (*The Schoolwide Enrichment Model* – SEM), resultado de seu trabalho que é considerado pioneiro, validado por mais de vinte anos de pesquisas empíricas. Sua metodologia também nos subsidiará quanto à identificação dos estudantes com AH/SD e Talento Lógico-Matemático.

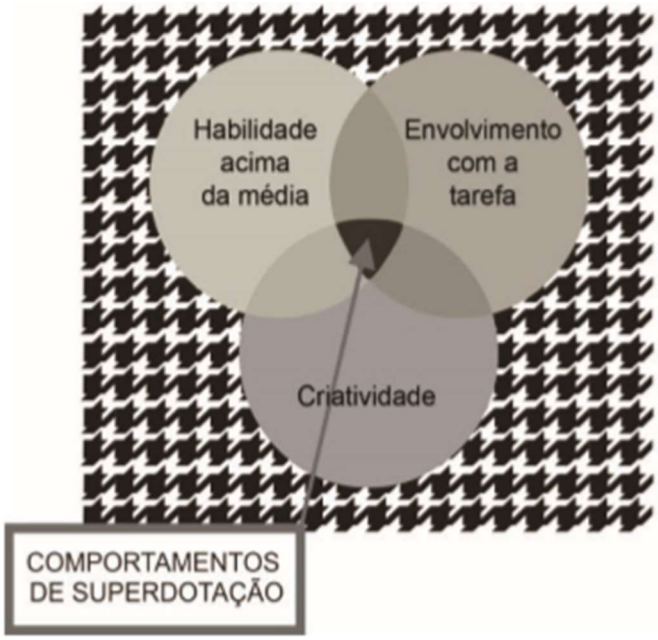
Segundo Renzulli (2004), pode-se dividir as capacidades superiores em duas categorias que são distintas: a superdotação escolar e a superdotação criativo-produtiva. A primeira é também conhecida como a "habilidade do teste ou da lição de aprendizagem", porque pode ser facilmente identificada por testes de QI e observações a partir de atividades acadêmicas. Geralmente, mas não sendo uma regra, os alunos com este tipo de habilidade possuem bons resultados na escola. Já a habilidade criativa-produtiva está diretamente ligada ao desenvolvimento de produções originais, tendo a ênfase direcionada ao uso e aplicação dos processos de pensamento.

A Teoria dos Três Anéis apresenta a superdotação como a interseção de três aspectos: capacidade acima da média, criatividade e envolvimento com a tarefa. Os três anéis estão postos em um padrão xadrez que representa os fatores ambientais, familiares, emocionais, e de personalidade que favorecem o aparecimento da superdotação.

Estes três aspectos mencionados são definidos da seguinte forma: a capacidade acima da média é considerada a partir dos comportamentos visivelmente observados, relatados e constantes que confirmam a expressão de habilidades superiores em relação a uma média em qualquer área do conhecimento. O envolvimento com a tarefa é expresso no alto nível de interesse e motivação pessoal nas atividades realizadas em que possui habilidades

superiores. Por sua vez, a criatividade é definida como a demonstração de traços criativos, no fazer ou no pensar, tendo mais a ver com processos do que com produtos.

Figura 1: Modelo Triádico de Renzulli



Fonte: Google Imagens. Acesso em: 16/05/2018

Depreende-se que de todas as concepções citadas, não é simples caracterizar o indivíduo com AH/SD. Existem muitas variações que devem ser levadas em conta. O tempo de observação se faz primordial, assim como a sistematização das manifestações desses talentos.

3. Concepções de Superdotação a Partir de Vygotsky

Vygotsky (1994) contribui com nosso trabalho, no que diz respeito a suas ideias nas áreas da psicologia e educação, tendo o aprendizado e as relações entre ele e o desenvolvimento, os temas centrais de sua pesquisa, seu conceito chave está relacionado a mediação. Entendemos a superdotação como fruto da combinação dos fatores biológicos e ambientais, este segundo, recorrestes dos resultados das influências desta mediação do ambiente com os indivíduos.

Em termos mais simples, a mediação teorizada por Vygotsky (1994), pode ser considerada como o processo de intervenção de um elemento numa relação. No ambiente educacional, o professor e os demais colegas podem funcionar como elemento de

intervenção nas situações de aprendizagem de um indivíduo. Esta é a ideia fundamental dentro de uma perspectiva histórico-cultural.

Ao expor essas concepções, fica claro que em sua teoria, existe um percurso de desenvolvimento, parte dele definido pela maturação biológica do indivíduo e parte pertencente ao aprendizado que possibilita o despertar de processos internos de desenvolvimento que, não fosse o contato do indivíduo com o ambiente, não ocorreria.

Ao atribuir uma importância extrema a interação social no processo da construção das funções psicológicas humanas, sua teoria propõe a existência de dois níveis de desenvolvimento: o real (solução independente de problemas – a autonomia que o indivíduo possui ao desempenhar determinada tarefa) e o potencial (solução de problemas/ desempenho de tarefas com a colaboração de alguém mais capaz para auxilia-lo), existindo assim uma distância entre elas, chamada de zona de desenvolvimento proximal, caracterizada:

> A ZDP constitui-se em um conceito dinâmico e representa a distância entre o nível real (verificado a partir da capacidade de resolução individual dos problemas) e o nível potencial (evidenciado a partir da capacidade de resolução conjunta de problemas, contando com a ajuda de *experts*) (SOLTZ e PISKE, 2012, p. 254).

Por isso, apesar de o senso comum reforçar a ideia da autonomia intelectual e acadêmica do indivíduo superdotado, a famosa tese de que ele é autodidata e aprende sozinho, tem perdido forças a partir dos pressupostos de Vygotsky e suas ideias sobre a zona de desenvolvimento proximal.

É preciso que fique clara a ideia de que, mesmo latente no indivíduo, a capacidade superior, quando não estimulada, não se aperfeiçoa sozinha. O trabalho com o atendimento especializado para alunos com AH/SD tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente.

Este processo de potencialização dos talentos na escola, sejam eles de qualquer natureza, deve ser construído a partir da área de interesse dos alunos, tomando como ponto de partida o nível de desenvolvimento real deles. O meio escolar possui o papel de fazer o aluno avançar em sua compreensão de mundo a partir do seu desenvolvimento já consolidado, dando suporte para que ocorra o enriquecimento curricular.

4. Metodologia de Identificação

A identificação é um dos aspectos mais importantes a ser considerado no atendimento especializado do aluno com AH/SD, dada a necessidade de um pronto suporte, que tenha como principal objetivo a desenvolvimento das potencialidades e o ajustamento social desses alunos. É importante ressaltar que a identificação por si só, servindo apenas para diagnosticar atributos e sem o objetivo do trabalho especializado com o enriquecimento curricular, não possui validade quando estamos tratando de uma educação plena e de qualidade para esses indivíduos.

Por isso, para a realização desta pesquisa surge a necessidade de identificar os estudantes com AH/SD e Talento Lógico-Matemático no espaço do Ifes – Campus Vitória.

Buscando uma sistematização para este trabalho, iremos nos subsidiar na metodologia de Renzulli (1997) denominada de Modelo das Portas Giratórias, criado pelo teórico para facilitar a seleção do grupo de alunos que formará o chamado "Pool de Talentos" que receberá atendimento especializado. Essa metodologia consiste em um esquema de identificação composto por seis passos:

1- Indicação por meio de testes

No caso específico desta pesquisa, iremos avaliar o desempenho dos alunos nas provas das disciplinas das áreas de exatas/lógico-matemática. Vale ressaltar que estamos cientes de que as teorias atuais relacionadas à inteligência não concebem que as habilidades superiores podem ser verificadas apenas com testes psicométricos, no entanto, dentro do nosso contexto de pesquisa, acreditamos que a análise dos testes aplicados pelos professores pode ser o início de um primeiro indicativo de habilidade na área.

2- Indicação de professores

Por sua proximidade com os estudantes, os professores podem indicar os alunos que se destacam e que possuem características não perceptíveis de imediato e aos testes: criatividade, liderança, entre outras.

3- Caminhos alternativos (nomeação por colegas e auto-nomeação):

Questionários serão distribuídos nas turmas pesquisadas e os estudantes terão a oportunidade de indicar colegas ou fazer a auto-nomeação. Os resultados serão analisados e os alunos que forem nomeados serão encaminhados para uma entrevista em parceria com o Núcleo de Atendimento às Pessoas com Necessidades Específicas – NAPNE.

4- Indicações especiais

Trata-se de dar oportunidade à alunos que se destacaram em períodos anteriores, mas que por algum motivo (problemas pessoais, motivacionais, emocionais) estão apresentando um padrão de baixo rendimento escolar.

5- Indicação por meio da informação da ação

Dá a possibilidade do professor ou algum membro da equipe pedagógica indicar alunos que possuem altos níveis de envolvimento com a tarefa - fator considerado indicativo para a AH/SD, de acordo com Renzulli (2004), demonstrando interesse incomum em alguma disciplina, matéria ou tópico, necessitando de aprofundamento.

6- Notificação dos pais

Ao final da formação do Pool de Talentos os pais serão informados da indicação dos seus filhos com a finalidade de valorizar o potencial e talento dos estudantes, baseados na promoção da afetividade e autoestima. Será esclarecido que os alunos não serão rotulados de superdotados, mas que a pesquisa pretende incentivar estudantes talentosos e propor encaminhamentos para a produção de conhecimentos em prol da satisfação pessoal e inclusão escolar.

4.1 Possíveis encaminhamentos

Após a identificação dos estudantes com indicativos de AH/SD e Talento Lógico-Matemático, acreditamos que irão se expandir as possibilidades de resposta às suas necessidades educacionais, considerando os fatores socioculturais e a história de cada um, bem como suas características pessoais. Trata-se de verdadeiramente garantir a inclusão

desses alunos no espaço escolar tanto por meio de incrementos na intervenção pedagógica, quanto de medidas extras que atendam essas necessidades individuais.

Nesse sentido, os encaminhamentos serão apontados de acordo com o perfil dos alunos identificados. Em um primeiro momento podemos apresentar propostas de criação de parcerias com os diversos espaços do Ifes e também espaços não formais de educação, facilitando o acesso aos recursos de tecnologia, materiais pedagógicos e bibliográficos na busca do enriquecimento curricular. (bibliotecas, laboratórios, universidades etc.).

A criação de grupos de estudos e discussões no contra turno escolar pode ser considerada uma alternativa de estímulo à promoção de projetos e trabalhos, podendo ser expandida a eventos acadêmicos e feiras científicas.

Esse enriquecimento curricular diz respeito a oportunidades de experiências de aprendizagem que o currículo do ensino regular não proporciona para os estudantes. Propomos um caminho junto a diversidade, priorizando o desenvolvimento dos alunos de acordo com suas especificidades. Alencar e Fleith (2001) evidenciam que as práticas de atendimento ao aluno com AH/SD devem possibilitar o desenvolvimento ao máximo dos seus talentos, buscando uma existência feliz e realizada, onde possam fortalecer um autoconceito positivo e aplicar suas áreas de experiência.

5. Considerações Finais

A execução da pesquisa irá promover e evidenciar o trabalho e o atendimento dos alunos com AH/SD, tendo como foco o Talento Lógico-Matemático, dando visibilidade para existência dessa modalidade de ensino.

As possíveis intervenções propostas serão prerrogativas para uma educação com mais qualidade para esses alunos, pois a ênfase nas oportunidades escolares colabora para o processo de construção do conhecimento e para a valorização das diferentes formas de pensar. Práticas pedagógicas mais aprimoradas estimulam ainda mais o desenvolvimento das estruturas cognitivas e possibilitam criar recursos compatíveis com a finalidade educacional de ampliar as condições de aprendizagem desses alunos.

Portanto, acreditamos que esta pesquisa terá grande contribuição para a sociedade de maneira em geral, pois fica claro que o desenvolvimento de potenciais e talentos gera futuros profissionais capacitados que poderão trazer contribuições com o seu trabalho e produções para a comunidade.

Pretendendo atingir o âmbito escolar formal, não formal e a comunidade, temos a intenção de maximizar a participação dos alunos com AH/SD e Talento Lógico-Matemático da rede de ensino pública nos espaços de atendimento potencializadores dos seus talentos e além disso, promover a prática de pesquisas e desenvolvimento de produtos.

6. Referências

ALENCAR, Eunice Soriano de; FLEITH, Denise de Souza. **Superdotados:** Determinantes, Educação e Ajustamento. São Paulo, SP: EPU, 2001.

_____, Ministério da Educação**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional LDB 5.692**. 11 de agosto de 1971.

CAMPBELL, Linda; CAMPBELL, Bruce; DICKINSON, Dee. **Ensino e Aprendizagem por meio das Inteligências Múltiplas**. Porto Alegre, RS: Artmed, 2000.

GARDNER, Howard. **Estruturas da Mente** – a teoria das Inteligências Múltiplas. Porto Alegre, RS. Artes Médicas, 1994.

GUENTHER, Zenita Cunha. **Desenvolver Capacidades e Talentos**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

RENZULLI, Joseph. **O Que É Está Coisa Chamada Superdotação e Como a Desenvolvemos? Uma retrospectiva de Vinte e Cinco Anos.** Revista Educação, Pontíficia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. v.27, n.52 p. 75-131, jan/abril 2004.

_____. **The Schoolwide Erichment Model**: a how-to guide for educational excellence (2nded). Mansfield Center, CT: Creative Learning Press, 1997.

STOLTZ, Tania; PISKE, Fernanda Hellen Ribeiro. **Vygotsky e a Questão do Talento e da Genialidade**. In: MOREIRA, Laura Cereta. Stoltz, Tania. Altas Habilidades/Superdotação, Talento, Dotação e Educação. Curitiba: Juruá, 2012.

VYGOTSKY, Lev. **A Formação Social da Mente**. São Paulo, SP. Martins Fontes, 1994.

FORMAÇÃO CONTINUADA NA PERSPECTIVA DA COLETIVIDADE: APRENDIZAGENS DOCENTES SOBRE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Resumo: Este trabalho traz um recorte de pesquisa de mestrado profissional intitulada "Estudo de multiplicação e divisão em formação continuada de professores dos anos iniciais" inserido no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat). Na linha de formação de professores, essa pesquisa de mestrado objetiva analisar indícios de aprendizagens docentes sobre conceitos de multiplicação e divisão, manifestados por professores de anos iniciais durante um curso de formação continuada. Essa proposta foi desenvolvida com professores que ensinam matemática nos anos iniciais e que atuavam em escolas públicas em 2017 e realizada no formato de curso de extensão, ofertado pelo Instituto Federal do Espírito Santo no contexto do laboratório de matemática. Teve como tema de estudos questões conceituais sobre as operações de "multiplicação e divisão nos anos iniciais". O presente trabalho tem como objetivo analisar relações dos estudos e discussões coletivas estabelecidas nos encontros de formação com atividades de ensino e conceitos sobre as operações de multiplicação e divisão desenvolvidas pelas professoras participantes. Embasados na perspectiva Histórico-Cultural (Vigotski, 2010), assumimos a abordagem metodológica do materialismo histórico-dialético como caminho para planejamento, desenvolvimento e análise da nossa pesquisa. Nesta metodologia, precisamos tecer uma rede de relatos, experiências, práticas e desafios encontrados pelos professores para encontrarmos nosso caminho como formadores, norteando os encaminhamentos com a viabilidade de promover novas práticas no ensino destas operações. Durante o curso, desenvolvemos algumas propostas que desencadeavam discussões acerca das operações em questão, evidenciando sua necessidade histórica de surgimento, as diversas possibilidades de se trabalhar com algoritmos diferentes e o movimento existente entra as operações de multiplicação e divisão. Individualmente, as participantes demonstravam timidez e dúvida em qual ação tomar, porém, nos momentos coletivos, trocavam experiências e conhecimentos, promovendo sistematização nessa interação com aproximações dos conceitos de multiplicação e divisão. Com isso, o saber passava a ser coletivo, e essa ação coletiva desencadeou motivação e novas aprendizagens no grupo conforme apontado por Moura (2005) para este tipo de pesquisa. Quando estamos em um grupo formado por sujeitos que desenvolvem o mesmo trabalho (no caso a atividade de ensino), eles se reconhecem como pertencentes a um mesmo objetivo e a troca de experiências e as tentativas de melhorar sua atividade na sua profissão promove um ambiente de compartilhamento, e culmina em uma aprendizagem construída por meio da coletividade. A ação coletiva contribuiu desse modo para ampliar o diálogo e as interações entre equipe e participantes, produzindo um conjunto de dados que contribuem para apreender o movimento formativo e os indícios de nova qualidade dos conhecimentos docentes.

Palavras-chave: Formação Continuada; Multiplicação e Divisão; Teoria Histórico-Cultural; Coletividade.

1. Introdução

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa vinculada ao Programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Educimat/Ifes). Trata-se de estudo desenvolvido no contexto das ações do Grupo de

Pesquisa em Práticas Pedagógicas em Matemática (GRUPEM), relacionado a linha de pesquisa sobre formação de professores. Tem como temática a formação de professores dos anos iniciais que ensinam matemática, mais especificamente focalizando discussões sobre o ensino de multiplicação e divisão.

A escolha dessa temática é motivada pela importância que o ensino das operações básicas assume na etapa do ensino fundamental I. A esses conhecimentos, o professor dedica grande período do seu planejamento e de suas aulas, tentando proporcionar ao aluno a sistematização dos procedimentos que compreendem a resolução de cada operação, que ocorre muitas vezes de forma fragmentada, desconsiderando a relação indissociável entre estas operações. Dentro dessa temática, as operações de multiplicação e divisão são as que mais geram insegurança no docente e, consequentemente, no discente, por apresentar um maior estímulo a interpretação, abstração e procedimento.

Diante deste contexto, investimos em uma proposta de formação continuada com professores dos anos iniciais da rede pública. Organizamos na forma de curso de extensão, no ano de 2017 e envolveu 20 professores. Contemplou 10 encontros presenciais e atividades no ambiente moodle. Nesse curso, privilegiamos estudos coletivos que abordavam os conceitos de multiplicação e divisão como produções humanas, formuladas conforme as necessidades oriundas das práticas sociais. Assim, buscamos compreender como uma proposta de formação dessa natureza favorece a ressignificação de conhecimentos lógico-histórico inerente aos conceitos de multiplicação e divisão pelos professores participantes e influencia em modos de organização do ensino.

O presente artigo, então, trará os resultados desta pesquisa no que tange o movimento de formação continuada favorecido pela coletividade, sendo objetivo analisar relações dos estudos e discussões coletivas estabelecidas nos encontros de formação com atividades de ensino e conceitos sobre as operações de multiplicação e divisão desenvolvidas pelas professoras participantes.

Utilizando-se da abordagem histórico-cultural como base para o referencial teórico e desenvolvimento da pesquisa, para fins metodológicos, entendemos que nossa pesquisa se aproxima do método materialismo histórico-dialético que privilegia a análise do processo de transformação, assim, possibilitando compreender o movimento da formação dos participantes a partir da proposta desenvolvida nesta pesquisa.

2. Referencial Teórico

Para subsidiar as discussões sobre o campo multiplicativo, na ação de formação continuada com professores dos anos iniciais que realizamos como parte de nossa pesquisa, partimos da compreensão de Caraça (2003) quando diz as operações de multiplicação e divisão pertencem ao 2º grau, e nomeia a multiplicação como direta e a divisão como inversa. Assim ele explica que:

> A inversão da multiplicação consiste em "dado o produto e um dos fatores, determinar o outro. Deveria também haver duas inversas, mas que se confundem numa só - divisão - em virtude da propriedade comutativa" (CARAÇA, 2003, p. 20).

Desse modo, corroboramos para o pressuposto que a multiplicação e a divisão são inseridas no mesmo raciocínio matemático, podendo ser chamados de estruturas multiplicativas ou campo multiplicativo segundo alguns autores.

Articulamos essa compreensão as proposições de Moura (2005) no sentido de que as formações (inicial e continuada) precisam deixar latente em seus participantes que o conteúdo não é o objeto central de estudo do professor em formação/capacitação. É essencial e insubstituível que o professor tenha compreensão do conhecimento científico. Mas:

> Faz-se necessário a compreensão da complexa trama que envolve a educação escolar e o indispensável compartilhamento de diferentes fontes de conhecimento e espaços de aprendizagem na formação do professor (MOURA, 2005, p. 95).

Para o autor, o docente não é aquele que ensina apenas o saber acadêmico, e sim o que apresenta um elo entre o conhecimento e o humano/cidadania. Os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental carecem de desenvolver o potencial de seus alunos por meio de práticas reflexivas, para além do conteúdo programático. Moura (2005) aponta que um caminho viável para a ascensão de ideais que problematizam/ampliam o objeto de estudo do professor é a formação em parceria, o momento em que os docentes fariam trocas de experiências com seus pares de profissão (ou sujeitos envolvidos no processo). E nessa relação dialógica, naturalmente, é desenvolvida uma reelaboração de práticas e metodologias por parte dos envolvidos. Vigotski (2010, p. 461) afirma que "a educação é um processo de mútua e contínua adaptação de ambos os campos, no qual a parte mais dinâmica e terminantemente ativa é ora o orientador, ora os orientados". Assim, para ele, o que estava em análise não é o conhecimento gerado e nem o resultado final, mas sim todo o processo de desenvolvimento e, por conseguinte, a aprendizagem. O professor, de acordo com essa teoria, tem a função de promover, usando diferentes estratégias,

situações potencializadoras de descobertas e reflexões que permitam que o sujeito se desenvolva.

Ainda na mesma linha teórica da abordagem histórico cultural ressaltamos o ponto de partida para as proposições davydovianas (ROSA; DAMAZIO; CRISTANI, 2014) é a necessidade prática de resolver uma tarefa: o ser humano precisa sentir a carência de conhecimento ao resolver o problema, o que gera nele a motivação para produzir novos caminhos para encontrar suas respostas. Isso faz com que o aluno tome para si o conhecimento que foi elaborado coletivamente na sala de aula, e ao torná-lo significante, consegue apropriar-se para aplicá-lo em outras situações, no qual encontra semelhanças e divergências. Nesta proposta teórico-metodológica, a criança realiza multiplicações e divisões sem contas ou nomenclaturas, tendo apenas como objetivo inicial explorar o raciocínio matemático. Isso permite que o aluno faça suas próprias abstrações e reflexões, utilizando a mesma linha de pensamento para explorar as operações de multiplicação e divisão, sem dissociação, promovendo um inter-relacionamento entre essas duas operações.

3. O Curso de Extensão

O curso de extensão, conforme sinalizamos, foi uma ação do Grupo de Pesquisas em Prática Pedagógicas em Matemática – Grupem e integra o programa de extensão intitulado FORMAÇÃO DE PROFESSORES NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA DO IFES/VITÓRIA. Foi estruturado em 10 encontros presenciais e também tarefas de formação disponibilizadas na plataforma moodle, sendo assim semipresencial, compreendendo uma carga horária total de 80 horas.

A proposta de desenvolvimento do curso de formação teve o intuito de constituir coletivamente um espaço de aprendizagem voltado a formação continuada para professores dos anos iniciais do ensino fundamental analisando apropriações de conhecimentos de multiplicação e divisão.

> Acreditamos que a compreensão do papel da atividade de ensino deve levar a uma metodologia de formação do professor que assegure a apreensão de vários elementos que a constituem como ação educativa: os aspectos psicológicos, sociológicos, curriculares, didáticos e pedagógicos (Moura,1996, p.30).

Foram desenvolvidas atividades orientadas para as práticas de ensino, discutindo sobre as operações em questão e seus diferentes termos, conceitos, propriedade e seu contexto histórico de significados. Os sujeitos da pesquisa foram professores dos anos iniciais que

ensinam matemática, todos da rede pública de ensino (municipal ou estadual), que eram regentes de sala de aula no ano de 2017.

4. Procedimentos Metodológicos

Considerando a natureza do objeto de nossa investigação, o fenômeno da formação docente sobre o campo multiplicativo, entendemos a necessidade de uma metodologia que possibilite captar os dados da investigação em seu processo de desenvolvimento. Assim, optamos pelos princípios do materialismo histórico dialético. Essa abordagem permite analisar historicamente e prioriza o estudo da transformação do objeto pesquisado, tanto a transformação das suas propriedades e também suas relações, capturando o fenômeno no que ele era, é, e no que pode vir a ser (MOURA, 2017). Para isso utilizamos recursos como questionários semi estruturado, vídeo-gravação de encontros de formação, registros escritos elaborados pelos professores cursistas, fotografias e relatos de experiências didáticas. Esses diferentes instrumentos subsidiarem a apreensão do processo de mudança dos conhecimentos teóricos e metodológicos explicitados pelos participantes durante o curso.

No período do curso abordamos diferentes temas como agrupamentos em diferentes bases, o percurso histórico da multiplicação e divisão, as proposições davydovianas para o ensino desses conceitos, o movimento dessas operações na reta numérica, a multiplicação e suas ideias (adição de parcelas iguais, disposição retangular, proporcionalidade e combinatória) e a divisão e suas ideias (partitiva e quotativa). Dados os limites desse texto, apresentamos no próximo tópico alguns dados relativos as apropriações de conhecimentos de multiplicação e divisão pela coletividade.

5. Resultados e Discussões

Durante o curso, desenvolvemos algumas propostas que desencadeavam discussões acerca das operações em questão, evidenciando sua necessidade histórica de surgimento, as diversas possibilidades de se trabalhar com algoritmos diferentes e o movimento existente entra as operações de multiplicação e divisão. Individualmente, as participantes demonstravam timidez e dúvida em qual ação tomar, porém, nos momentos coletivos, trocavam experiências e conhecimentos, promovendo sistematização nessa interação com aproximações dos conceitos de multiplicação e divisão. O Laboratório de Ensino de Matemática foi escolhido como ambiente de realização do nosso curso, por ser um espaço contextualizado com amplo acervo de materiais manipulativos no ensino de matemática,

e também por ter uma disposição de mesas e cadeiras que promovem e incentivam o trabalho em grupos, em que os estudantes estão em situações que permitem que sejam compartilhadas informações por todo o processo.

Figura 4: Laboratório de Ensino de Matemática - LEM.

Fonte: Os autores

As professoras participantes do curso, não se conheciam em sua totalidade, e inicialmente elas tinham mais liberdade de comunicação em duplas ou trios. Com o passar dos encontros, e com o convívio do curso e no grupo do curso no aplicativo de mensagens Whatsapp, percebemos que as professoras se reconheciam como parceiras de conversa e aprendizagens. Dessa forma, já direcionamos nossa intencionalidade para a valorização do compartilhamento durante o processo de aprendizagem como um facilitador do processo de ensino, e que situações de atividades colaborativas em sala de aula potencializam momentos em que os estudantes ampliem suas experiências e conhecimentos matemáticos. E consequentemente, que as professoras em formação, vivenciem e reflitam sobre as potencialidades de ter os alunos em atividade coletivamente, com grupos pequenos e no grande grupo.

> As situações vivenciadas e refletidas no coletivo podem levar os sujeitos a melhor apreender o mundo em que vive, adquirir novos instrumentos para intervir em seu meio cultural e a desenvolver um "novo" olhar sobre o significado de ensinar e aprender, nas relações de sala de aula (Marco; Moura, 2016, p. 25).

Pensar coletivamente tem mais potencial do que o pensamento individual, ou seja, na maioria das vezes, o relacionamento interpessoal promove a troca de conhecimento, fazendo com que aquele saber que era só de um indivíduo, passe a ser de todo o grupo, e também a dúvida de um, ganha a amplitude de todo grupo para ser superada.

No terceiro encontro, com a oficina de agrupamentos, elas foram convidadas a trabalhar com diferentes bases no sistema de numeração, no intuito central de promover uma situação em que elas vivenciassem a real motivação inicial humana de necessidade de utilizar o conceito multiplicativo para facilitar suas atividades e satisfazer suas necessidades.

Figura 2: Oficina de Agrupamento - 3º encontro - 18/09/2017.

Fonte: Os Autores

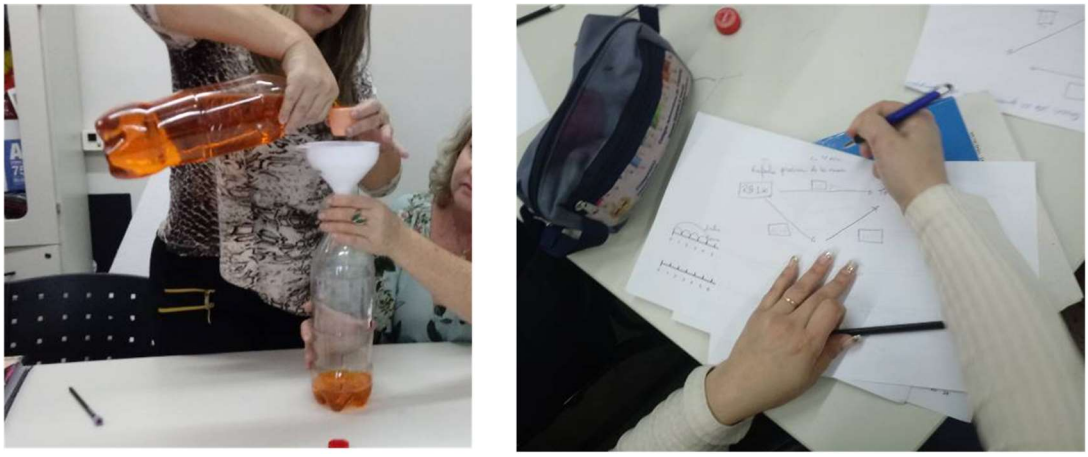
Perante os diversos comandos realizados na oficina, as participantes observaram e concluíram coletivamente que o ato de agrupar facilita o processo de contagem, e a multiplicação (na ideia de adição de parcelas iguais) surgi para otimizar este processo, no caso, saber quantas balas tem-se no total. Percebemos que quando as participantes realizaram a leitura individual e silenciosa, as balas, saquinhos e a cesta ficaram intocados, ou seja, apresentaram insegurança ou desconheciam como realizar o que se pedia. Quando se passou essa situação desencadeadora de aprendizagem para o coletivo, sem se fazer necessária a explicação da história e nem do conceito, somente a mediação dos dados do problema, elas conseguiram concluir e imediatamente começaram a executar a tarefa de completar 1 (uma) cesta utilizando a base do grupo. Motivadas pela situação, todas as participantes contribuíram no manuseio e realização da atividade e mesmo com dúvidas, sentiram liberdade de perguntar, até que seja esclarecido o "porquê" dos procedimentos adotados pelo grupo e pela equipe do curso. Libâneo (2004) coloca que:

> Por se basear na natureza teórica da aprendizagem formal, a cultura aparece como algo a ser reproduzido, para o que se torna imprescindível a comunicação entre as pessoas, no sentido de comunicação da experiência social. Ou seja, a interiorização consiste no processo de transformação da atividade coletiva em uma atividade individual. (p. 21)

Por meio da perspectiva histórico-cultural, Leontiev (1980) descreve o processo de internalização, e realça o seu caráter coletivo a medida que na mediação (de conhecimentos exterior para o interior) o homem se apropria dos conhecimentos sociais, culturais e históricos. Essa interação com o(s) sujeito(s) promovendo mudança de qualidade do seu trabalho de ensino com novos saberes precisa ser potencializado nas práticas de ensino, e também, como evidenciamos, nas atividades de formação dos professores, visto que o saber que ora era individual, quando compartilhado, passa a ser de todos. Quando estamos em um grupo formado por sujeitos que desenvolvem o mesmo trabalho (no caso a atividade de ensino), eles se reconhecem como pertencentes de um mesmo objetivo e a troca de experiências e as tentativas de melhorar sua atividade na sua profissão promove um ambiente de fácil compartilhamento, e culmina em uma aprendizagem construída pela própria coletividade.

Realizamos também a oficina com líquidos, na qual utilizamos as proposições davydovianas no ensino do conceito de multiplicação e divisão, contextualizando teoricamente e manipulando os materiais (garrafa PET, copos e líquido), demonstramos a identificação da Unidade de Medida Inicial e a Unidade de Medida Intermediária como a base do pensamento multiplicativo.

Figura 3: Oficina com Líquidos – 4º encontro – 25/09/2017.



Fonte: Os autores.

Vemos assim, que a equipe organizadora do curso, não ministra ou "dá" o curso, e sim assume um papel de potencializador das discussões, fazendo o planejamento e direcionando na mediação para que as participantes se aproximem do conhecimento teórico objetivado. Para Moura (2012, p. 155) "os sujeitos estão expostos a um incessante movimento de construção de significados ao interagirem com objetos de conhecimento".

As professoras participantes do curso, em uma ação de compartilhamento, realizaram esse movimento de elaboração de significados para as práticas que elas já realizam em sala de aula, tornando sua atividade do dia-a-dia com mais conhecimento teórico, e reformulando seu planejamento sustentado pelas novas construções.

Percebemos, por meios das cenas evidenciadas nestes tópicos, o movimento de mudança da ideia de Formação Continuada a qual as participantes estavam acostumadas antes de participarem do curso. Durante os encontros e nos outros meios virtuais de comunicação e estudo, com as professoras reconheceram que a dinâmica dos encontros direcionava a construção coletiva das apropriações do grupo, que o contato com o outro estabelecia o processo de formação. Visto que, com o passar dos encontros, elas valorizavam a todo o momento a fala das companheiras e a partir destas, estabeleciam suas apropriações.

6. Considerações Finais

O que percebemos ao longo do curso, é que durante os encontros, as participantes, com a equipe que coordenava, realizavam interações e mediações, que iam-se constituindo um acordo coletivo do que pensamos. Ou seja, as conclusões teóricas evidenciadas foram tecidas a medida que o grupo entrava em interação umas com as outras, e neste movimento se apropriavam de novos conhecimentos.

Quando estamos em um grupo formado por sujeitos que desenvolvem o mesmo trabalho (no caso a atividade de ensino), eles se reconhecem como pertencentes a um mesmo objetivo e a troca de experiências e as tentativas de melhorar sua atividade na sua profissão promove um ambiente de compartilhamento, e culmina em uma aprendizagem construída por meio da coletividade. A ação coletiva contribuiu desse modo para ampliar o diálogo e as interações entre equipe e participantes, produzindo um conjunto de dados que contribuem para apreender o movimento formativo e os indícios de nova qualidade dos conhecimentos docentes.

7. Referências

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, Gradiva, 2003.

LEONTIEV, ALEXEI N. **Actividad. Conciencia .personalidad**. Ed. Pueblo y Educación.– La Habana, 1980.

LIBÂNEO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, Universidade Católica de Goiás, Set /Out /Nov /Dez Nº 27, 2004.

Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a01.pdf/> Acesso em: 10 fev. 2017.

MARCO, F. F. de; MOURA, M. O. de. **Quando ações desenvolvidas por professores em processo de formação se constituem em atividade orientadora de formação docente**: Alguns indicadores. In: Professores e futuros professores em atividade de formação. Coleção: Princípios e práticas da organização do ensino de matemática nos anos iniciais. Volume 1 / Campinas, SP: Pontes Editores, 2016.

MOURA, Anna Regina Lanner de; et al. **Controle da Variação de Quantidades:** Atividade de Ensino. MOURA, M. O. de. (Coord.).In: Textos para o ensino de ciências, 7. São Paulo. FEUSP, 1996.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. Espaços de aprendizagem e formação compartilhada. **Revista de Educação – PUC**. Campinas, n. 18, p. 91-97, jun. 2005.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de (Org.). **Educação Escolar e Pesquisa na Teoria Histórico-Cultural.** São Paulo, ed. Loyola, 2017.

ROSA, J. E. ; DAMAZIO, A. ; CRESTANI, S. . Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, p. 167-187, 2014. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/15761/pdf> Acesso em 13 fev. 2017.

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **Psicologia pedagógica**; tradução do russo e introdução de Paulo Bezerra. – 3ª ed. – São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, (Coleção textos de psicologia) 2010.

JOGO DA ONÇA E SUAS VARIAÇÕES NA CULTURA INDÍGENA NO ESPÍRITO SANTO

Laira Lamburghini Ribeiro, Vanessa Carmo dos Santos, Claudia Alessandra Costa de Araújo, Lígia Arantes Sad

lairalbr@gmail.com

Resumo: Este trabalho é parte de uma pesquisa de Iniciação Científica, desenvolvida no Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes, campus Vitória, que investiga ideias matemáticas para a educação escolar indígena a partir de saberes tradicionais desses povos no Espírito Santo. O texto apresenta um estudo bibliográfico de jogos indígenas com trabalho de campo realizado junto aos Guarani no Espírito Santo. Destaca o Jogo da Onça, com suas variações e potencialidades para o ensino da matemática. O "Jogo da Onça" ou "Jogo da Onça e dos Cachorros" é um jogo de tabuleiro, composto por quinze peças, representando uma onça e quatorze cachorros. Seu objetivo principal é fazer com que a onça capture cinco cachorros, ou fazer a mesma ser encurralada, sem possibilidade de movimento. A escolha do tema se fundamenta numa concepção de que o jogo, enquanto situação imaginária, com um conjunto de regras e jogadores (MOURA, 2013), favorece situações de ensino-aprendizagem em matemática, por demandar tomadas de decisão frente à resolução de problemas. Na perspectiva da Etnomatemática (D'AMBROSIO, 1994), adotada na pesquisa, o jogo jogado no contexto indígena pode acionar modos de conhecer e explicar próprios daquela realidade. Assim, explorar na educação escolar um jogo tradicional de um povo pode se refletir em uma educação matemática com mais significado. Com essas premissas, o estudo bibliográfico visou a investigar questões ligadas à matemática presente no cotidiano indígena. Foram pesquisados jogos indígenas em diversas culturas em âmbito nacional e internacional buscando-se estabelecer elementos de análise que favorecessem o conhecimento e a importância de jogos da cultura indígena local. Mediante as leituras, encontrou-se em evidência o "Jogo da Onça". No presente trabalho, destaca-se o referido jogo também por ter sido encontrada uma versão semelhante a ele entre os Guarani na cidade de Aracruz – ES, porém, fazendo referência a uma disputa entre cachorro e gatos. A pesquisa de campo em andamento sugere que o jogo seja mais conhecido entre os mais velhos da comunidade. Embora, aparentemente, seja pouco conhecido entre os jovens, é de amplo interesse registrar a presença deste jogo e, então, levar às salas, indígenas e não indígenas, aproveitando, desta maneira, a lógica contida no jogo para o estudo da matemática e de estratégia. Este estudo revelou a presença, em diversas regiões, de variações deste jogo, mostrando que em cada uma o jogo incorporou questões próprias e, até mesmo, reflete aspectos regionais importantes como o caso dos Guarani no Espírito Santo, que fazem referências a cachorros e gato, em vez de onça e cachorros. Também é possível notar uma multiplicidade de saberes indígenas e conhecimentos matemáticos que são evidenciados ao se jogar o "Jogo da Onça".

Palavras Chaves: Etnomatemática. Jogos Indígenas. Jogo-da-onça.

1. Introdução

Este trabalho é fruto de uma iniciação científica desenvolvida junto ao projeto de pesquisa "Saberes tradicionais indígenas em educação matemática nas escolas indígenas de Aracruz-ES" (2017-2018)[1], desenvolvido no Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes, campus Vitória, que investiga ideias matemáticas para a educação escolar indígena a partir de saberes tradicionais desses povos no Espírito Santo. O texto apresenta um estudo bibliográfico de jogos indígenas com trabalho de campo realizado junto aos Guarani no Espírito Santo. Esta pesquisa foi motivada pela participação de uma anciã da aldeia, que quis contribuir nos apresentando esse jogo, desenhando o tabuleiro numa folha e mostrando os movimentos. Esta Anciã nos apresentou o jogo como sendo o jogo do Gatinho e do Rato e a partir do que ela nos apresentou começamos a compará-lo com outros já mais conhecidos no meio acadêmico, como o Jogo da onça. Então procuramos algumas variações, regras, como foram utilizados no ensino escolar indígena, e concluímos que seria importante valorizar e explorar esse aspecto da cultura indígena Guarani no Espírito Santo, pela falta da menção desse jogo pertencer a eles.

Para tanto, definiremos a seguir nossa concepção de jogo e o que ele proporciona culturalmente no contexto indígena, e ainda um breve levantamento sobre alguns jogos indígenas citados em artigos de interesse. Com isso, procuraremos mostrar a riqueza deles e também sua semelhança aos ocidentais. Para concluir, exporemos o jogo da onça e suas variações encontradas e a apresentada pela Anciã Guarani e explicitaremos em seguida alguns saberes que pudemos reconhecer nele.

2. Jogos e Etnomatemática

Entendemos que o jogo, geralmente, trata de uma situação imaginária com regras e jogadores e que é um possível elemento pedagógico, pois oportuniza momentos de construção de conhecimento por meio da interação. Defendemos ainda que o conteúdo matemático não deve estar no jogo e sim no jogar, pois se o jogo se faz por imaginação então permite a experimentação e apreensão de determinados conceitos. Visto que

> O jogo na Educação Matemática tem uma intencionalidade, ele deve estar carregado de conteúdo. É um conteúdo que não pode ser apreendido pela criança apenas ao manipular livremente objetos. É preciso jogar. E ao fazê-lo é que se constrói o conteúdo a que se quer chegar. O conteúdo matemático não deve estar no jogo, mas no ato de jogar. É por isto que o professor tem um papel importante. Não só como juiz, mas como jogador que já conhece as regras e as reinventa com os seus companheiros de equipe: os alunos (MOURA, 2013, p. 65).

Destacamos a importância do resgate de elementos culturais para a educação matemática indígena e o respeito às diferentes formas de produzir conhecimento (D'AMBROSIO, 1994) e a importância da intencionalidade, do planejamento e da consciência do valor pedagógico, para que o jogo não fique perdido somente no lúdico e sem um objetivo claro e conciso do que se quer abordar através dele (OCTÁVIO E ARAÚJO, 2015).

A etnomatemática é capaz de prover ao indivíduo capacidade de "explicar, entender, conviver com sua realidade" (D'AMBROSIO, 1994, p. 95) em âmbitos naturais, sociais e culturais. O ambiente de ensino deve ser de acordo com o interesse do aluno, ou seja, de acordo com o contexto social, natural e cultural dele, pois ele dificilmente responderá a situações estranhas à sua experiência. Visto que

> Ao reconhecer um desenvolvimento pleno, ancorada numa lógica própria e adequada ao próprio contexto sociocultural, estaremos reconhecendo o índio na plenitude e no domínio de sua criatividade e assim capaz de adquirir, no contexto de sua autenticidade cultural, outras formas culturais que lhes sejam convenientes e de interesse (FERREIRA, 1992, apud D'AMBROSIO, 1994, p. 97).

Na perspectiva da Etnomatemática (D'AMBROSIO, 1994), adotada na pesquisa, o jogo jogado no contexto indígena pode acionar modos de conhecer e explicar próprios daquela realidade. Assim, explorar na educação escolar um jogo tradicional de um povo pode se refletir em uma educação matemática com mais significado, com reconhecimento e valorização da cultura indígena local.

3. Jogos Indígenas

Pelo levantamento bibliográfico que realizamos, pudemos encontrar três tipos de jogos distintos, os jogos indígenas que são em formato de desafios, as atividades corporais e os jogos de tabuleiros, de acordo com a classificação de Grando (2010). A seguir, listamos alguns exemplos de jogos indígenas para ilustrar cada tipo de jogo encontrado.

1. Jogos em formato de desafios:

Adivinhe o número Xavante (COSTA, TENÓRIO, TENÓRIO, 2014).

2. Atividades corporais:

Oto, Agukaka, Gavião-Kalapalo (OKADAL, BARRETO, 2011); petecas, arco e flecha, cestaria.

3. Tabuleiros:

Anel Africano, Rifa (jogo de dados), Casa dos Reis, Jogo da Onça (GRANDO, 2010).

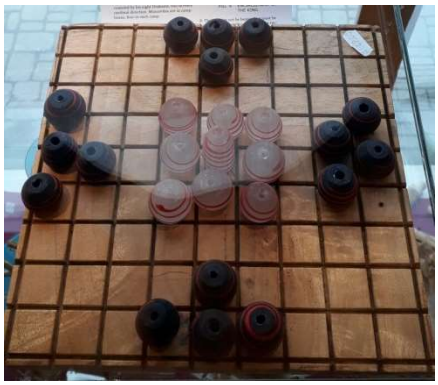
Dos jogos de tabuleiro, em geral, os "objetos (pedras, figuras etc.) simbolizam pessoas ou animais ferozes, ambos com poderes que estimulam desafios" e contribuem para "refletir sobre as representações sociais da sociedade que o pratica" (GRANDO, 2010, p.29).

De acordo com Ferreira, Vinha e Souza (2008), a respeito dos jogos antigos de tabuleiro, há imprecisões quanto à suas origens, alguns derivam de arquiteturas de templos sagrados, e foram talhados em diversos materiais, porém cada um corresponde à tradição da sociedade local. E esses jogos tratam de simulações, onde "todas as situações visam planejar, avaliar e calcular sua posição em um jogo, real ou não, figurando ensinamentos que têm na base a estratégia" (FERREIRA *et al*, 2008, p.49).

Grando (2010) também nos alerta a respeito da falta de registros sobre a origem dos jogos indígenas, se foram criados pelos indígenas ou aprendidos com os colonizadores, visto as tentativas de calar alguns povos subjugados e de usurpar seus conhecimentos tradicionais tomando de autoria dos colonizadores, mas o importante é que o jogo represente o povo e sua cultura. Entretanto, podemos verificar semelhanças entre os de várias culturas que se aproximam aos indígenas e até regras, movimentos, peças que remetem uns a outros.

Em geral, os jogos de tabuleiros remetem a situações importantes para a população local e discutem saberes sociais e tradições importantes. Como exemplo, citamos o antigo jogo nórdico *Hnefatafl* (rei do conselho) que simula sagas medievais que foi introduzido antes do xadrez. Este jogo inicia com forças desiguais e representa estratégias tomadas por reis e exércitos para expansão. Podemos perceber então uma semelhança de alguns jogos com jogos com padrões europeus.

Figura 5: Tabuleiro Hnefatafl com suas peças em posição inicial.

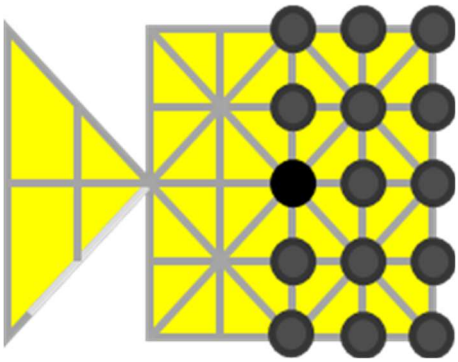


Fonte: Os autores

5. O Jogo da Onça

Este jogo é encontrado nos primeiros registros históricos dos grupos étnicos entre os Manchakeri (Acre), os Guarani (São Paulo), e os Bororo (Mato Grosso) (GRANDO, 2010), mas ainda não pelos Guarani de Aracruz-ES. Também conhecido como Jogo da Onça, Jogo da onça e dos cachorros, Adugo, Jogo do gatinho e dos ratos, e como o Jogo do gatinho e dos cachorros, essas diferentes versões possuem movimentos, regras e objetivos semelhantes ou iguais. As peças representam força e ataque, a onça mostrando sua força e os cachorros habilidade de ganhar em alcateia. O tabuleiro é habitualmente traçado na terra e pedras são usadas como peças na representação do tabuleiro (figura 1). As regras do Jogo da Onça são descritas a seguir com base em Lima & Barreto (2005).

Figura 2: Representação de Tabuleiro e peças do Jogo da Onça.



Fonte: Os autores.

REGRAS DO JOGO

1. Preparação do jogo

Coloque as peças conforme o desenho acima. Use dois tipos de peças, uma representando a onça e 14 peças para os cachorros.

2. Número de jogadores

Dois. Um jogador fica com a onça e outro com os 14 cachorros.

3. Objetivo do jogo

O jogador com a onça deve capturar cinco cachorros. O jogador com os cachorros deve encurralar a onça, deixando-a sem possibilidade de se mover no tabuleiro. O jogador com os cachorros não pode capturar a onça, deve apenas imobilizá-la.

4. Movimentação

O jogador com a onça inicia a partida movendo sua peça para qualquer casa adjacente que esteja vazia. Qualquer movimento, da onça ou dos cachorros, deve seguir pelas linhas – segmentos de reta traçados no tabuleiro. Em seguida, o jogador com os cachorros deve mover qualquer uma de suas peças também para uma casa adjacente que esteja vazia. As

peças podem se mover em qualquer direção. A onça deve tomar cuidado para não entrar em sua toca (parte triangular do tabuleiro). Caso isso aconteça, ela poderá ser mais facilmente encurralada pelos cachorros. A onça captura um cachorro quando salta sobre ele para uma casa vazia, mas os cachorros não podem pular sobre a onça. A captura da onça pode acontecer em qualquer sentido. O jogador pode fazer mais de uma captura, se for possível. Os jogadores alternam as jogadas até um dos dois vencer a partida.

5. Vencedor da partida

O jogador com a onça quando consegue capturar cinco cachorros.

O jogador com os cachorros quando consegue imobilizar a onça.

Podemos destacar sobre este jogo semelhanças com outros jogos mais conhecidos. Por exemplo, o objetivo de 'encurralar' dos cachorros se assemelha ao do jogo de xadrez; e o movimento das peças e a morte dos cachorros se assemelham ao que ocorre no jogo de dama.

Listamos abordagens que o jogo possibilita para a matemática escolar tentando exemplificar oportunidades de construção de saberes envolvendo um fazer matemático mais próximo do universo indígena.

Na construção do tabuleiro podemos explorar conceitos de matemática escolar como a utilização de escala no caso de reprodução do tabuleiro original para o que a criança estará jogando; a construção do tabuleiro pode remeter também à ideias de segmento de reta, ponto médio de um segmento e situações de medição de comprimentos, de identificação de ângulos ou reconhecimento de polígonos e suas propriedades.

De modo geral, um simples campeonato entre duplas, com algum critério de pontuação (que pode ser negociado entre os jogadores) já permite a exploração de ideias de contagem, de sistemas de numeração e de operações aritméticas. Mais particularmente, o planejamento e a análise de jogadas por cada jogador demandam o estudo de possibilidades envolvidas a propriedades geométricas. Por exemplo, identificar o local que requer o menor número de cachorros para encurralar a onça, passa por uma avaliação do número de segmentos que se intersectam em cada ponto entre outros fatores do tabuleiro. Por outro lado, uma listagem de tais possibilidades não garante o sucesso no jogo sem a prática do jogo, já que é no ato de jogar, que são efetuadas as tomadas de decisão.

O jogador estudante, não necessariamente, vai conectar os diferentes aspectos pontuados acima a conteúdos da matemática escolar, mas tais situações podem enriquecer seu repertório de experiências a serem exploradas didaticamente pelo professor.

Destacamos ainda que o próprio jogo pelo jogo estimula o raciocínio, a concentração e a capacidade para criar estratégias, tão importantes no desenvolvimento de habilidades para resolução de problemas. Além disso, promove a organização do pensamento através da fala e das tentativas de expressar suas jogadas. A comunicação durante o jogo ou sobre o jogo reforça a identidade cultural local tanto no contexto escolar indígena, como também entre diferentes gerações. Portanto, o jogo proporciona interação social, favorecendo o desenvolvimento individual e o desenvolvimento coletivo na comunidade escolar.

6. Conclusões

Podemos considerar que o jogo está intrinsecamente ligado a contextos culturais visto que ele é uma manifestação cultural e pode refletir situações cotidianas e importantes para cada povo a qual ele pertence; também concluímos que o jogo se mostra um instrumento metodológico que pode contribuir para o desenvolvimento superior do aluno em contexto escolar indígena tanto oportunizando situações didáticas para ensino de matemática como também para a valorização e propagação da cultura indígena.

A partir do levantamento bibliográfico, percebemos que não é possível afirmar de onde este jogo surgiu exatamente, mas o trabalho de campo mostra que os Guarani em Aracruz o reconhecem como sendo seu e reconhecem nele elementos da sua organização social e cultural, como a importância da união da comunidade, expressa pelos cachorros, diante dos desafios, representados pela onça. Saberes indígenas como esses são evidenciados ao se jogar o Jogo da onça paralelamente a ideias de matemática envolvendo conceitos que a matemática escolar denomina geométricos como direção, sentido, segmentos de reta, interseção de segmentos, entre outros, associados à análise de possibilidades de jogadas.

7. Referências

COSTA, B. J. F; TENÓRIO, T; TENÓRIO, A. **A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA ETNOMATEMÁTICA INDÍGENA XAVANTE:** um jogo de probabilidade condicional. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1095-1116, dez. 2014.

D'AMBROSIO, U. **A Etnomatemática no Processo de Construção de uma Escola Indígena**. Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 63, jul./set. 1994. p. 93-99. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1980/1949>. Acesso em 24 de maio de 2018, as 11h07.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In FERREIRA, M. K. L. **Com quantos paus se faz uma canoa! A matemática na vida cotidiana e na experiência escolar indígena**. MEC, 1994.

GRANDO, Beleni Saléte. **JOGOS E CULTURAS INDÍGENAS**: Possibilidades para a educação Intercultural na escola. 2010.

FERREIRA, M. B. R.; VINHA, M.; SOUZA, A. F. DE. Jogos de tabuleiro: um percurso em etnias indígenas. **Revista Brasileira de Ciência e Movimento.** 2008; 16(1): 47-55.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **O jogo na educação matemática**. 2013. Artigo disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_07_p062-067_c.pdf>. Acesso em 12/04/2018, às 18h12

OCTÁVIO, L.S. ARAÚJO, E. S. **A matemoteca escolar: paradigmas do jogo no ensino de matemática**. Rev. Teoria e Prática da Educação, v. 18, n.2, p. 09-23, Maio/Agosto 2015. Disponível em: <http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/article/view/31440/pdf_82>. Acesso em: 09 de março de 2018.

OKADAL, E. C. R; BARRETO, S. M. G. **VIVENCIANDO OS JOGOS E BRINCADEIRAS INDÍGENAS NA EDUCAÇÃO INFANTIL.** 2011. Disponível em: <http://www.eefe.ufscar.br/upload/8.pdf>. Acesso em: 09 de março de 2018.

LIMA, M; BARRETO, A. **O Jogo da Onça e Outras Brincadeiras Indígenas**. São Paulo: Panda Books, 2005.

Palavras-chave: Etnomatemática, Jogos Indígenas, Jogo-da-onça.

Referências:

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In FERREIRA, M. K. L. **Com quantos paus se faz uma canoa!** A matemática na vida cotidiana e na experiência escolar indígena. MEC, 1994.

MOURA, M. O. **O Jogo na Educação Matemática.** 2013. Disponível em: < http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_07_p062-067_c.pdf>. Acesso em: 27 de abril de 2018.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA SOCIOCRÍTICA E REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: MEDINDO O CONSUMO DIÁRIO DE ÁGUA

Silvana Cocco Dalvi, Oscar Luiz Teixeira de Rezende

silvanaej@hotmail.com

Resumo: A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica é uma prática pedagógica que aproxima problemas extraídos do contexto sociocultural dos alunos aos conteúdos escolares. Nessa prática para representar a realidade simplificada constrói-se modelos matemáticos usando registros semióticos, como: figuras, números, registro algébrico ou na língua natural. De acordo com a teoria dos registros de representação semióticos a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro a todo momento, existindo dois tipos de transformações: os tratamentos e as conversões. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é mostrar que a modelagem matemática na perspectiva sociocrítica favorece o trabalho pedagógico que privilegia a mobilização dos diferentes registros semióticos usados para ensinar matemática. Trata-se de parte de uma pesquisa de mestrado, de cunho qualitativa, desenvolvida numa escola localizada em Castelo, Espírito Santo, com alunos do 8º ano do ensino fundamental. Os instrumentos usados na produção dos dados foram o diário de bordo dos alunos, produções textuais e gravações em áudio. A questão desafiadora para a prática da modelagem foi: Eu sou gastão de água? onde os alunos foram convidados a medir o próprio consumo diário de água. O objeto matemático que surgiu desse processo de medição foi o número racional. Advogamos que a modelagem matemática na perspectiva sociocrítica propicia a elaboração de questões que possibilitam a troca de registros de representação semiótica. A articulação entre os diferentes registros de representação, de um mesmo objeto matemático é condição para a compreensão em matemática, e isso deve ser considerado nas abordagens didáticas que visam a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Palavras Chaves: Aprendizagem matemática. Modelagem matemática. Registro de representação semiótica

1. Introdução

Biembengut (2003) considera que, desde os tempos mais remotos, o homem já fazia uso da modelagem matemática, para resolver problemas do cotidiano e encontrar explicações para os fenômenos da natureza. Cita como exemplo dessa relação íntima entre matemática e realidade a experiência de Pitágoras (530 a.C.), que, ao esticar um fio ao meio, verificou que vibrava e, repetindo o processo, constatou que a oitava tinha proporção de dois para um. Usando os conhecimentos matemáticos das frações para medir as distâncias das cordas adicionais, criou a escala musical usada até os dias atuais. Para um processo de modelagem acontecer, basta haver um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático (BIEMBENGUT, 2003).

A modelagem matemática na perspectiva sociocrítica é uma prática pedagógica que possibilita entrelaçar os problemas do contexto social, aparentemente uma situação não-matemática aos conteúdos escolares. Os alunos participam da escolha do tema para estudo coletando informações e construindo modelos matemáticos que representam a realidade simplificada. Ela oportuniza a criação de uma relação indexadora entre o ambiente de aprendizagem investigativo e democrático e a compreensão do conteúdo matemático.

Vislumbramos na prática da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica uma possibilidade de criarmos situações de aprendizagem envolvendo a teoria dos registros de representação semiótica. Essa teoria trata especificamente da aquisição do conhecimento matemático considerando que, a compreensão dos objetos matemáticos implica na capacidade de trocar a todo momento de registro de representação.

Assim, desenvolvemos uma prática de modelagem na perspectiva sociocrítica onde os alunos foram convidados a medir o consumo diário de água. O objeto matemático que surgiu do processo de medição foi o número racional. Nessa circunstância, elaboramos atividades de transformações de representação semiótica. O objetivo desse trabalho é mostrar que a modelagem matemática na perspectiva sociocrítica favorece o trabalho pedagógico que privilegia a mobilização dos diferentes registros semióticos usados para ensinar matemática.

Num primeiro momento tratamos da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e da teoria dos registros de representação semiótica. Depois apresentamos e discutimos a prática de modelagem desenvolvida articulando-o aos registros de representações semióticas do número racional. Finalmente apresentamos nossas conclusões.

2. Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica

Com a expansão da modelagem matemática no âmbito educacional, notou-se que ela poderia atender a diferentes objetivos em diversos contextos, dependendo do encaminhamento dado à sua prática, o que reflete seu grande potencial educacional.

Para Barbosa (2004a), dois pontos são cruciais na prática da modelagem matemática:

- A referência num contexto real — Os temas para estudo devem ser extraídos do contexto sociocultural dos alunos. Devem constituir realmente um problema para eles, fazer parte do mundo-vida das pessoas.

- Esquemas não determinados previamente para abordar o problema — Como os procedimentos não são fixados de antemão, só os conhecem à medida que os alunos usam sua autonomia e investigam um possível caminho para solucionar o problema. Isso exige esforço intelectual.

Essa natureza "aberta" da modelagem leva à investigação, que é o trajeto para as indagações que se fazem. O aluno é convidado a produzir o conhecer reflexivo, cabendo ao professor mediar a integração entre os conheceres matemático, técnico e reflexivo. O envolvimento reflexivo dos alunos durante todo o ciclo da modelagem desenvolve competências democráticas que o ajudarão a ter uma atuação crítica também na sociedade.

Por esse prisma, Barbosa (2004b, p. 75) salienta:

> O ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

Esse ambiente de aprendizagem privilegia os processos interativos dialógicos estimulando o debate, a troca de informações, o levantamento de hipóteses, a busca por soluções e a investigação. O aluno é o protagonista no processo de ensino e aprendizagem de matemática assumindo a investigação. Nesse ambiente de problematização e investigação, o aluno expande seus conhecimentos atingindo níveis mais elevados de desenvolvimento.

Silva e Kato (2012), depois de terem analisado os artigos *Modelagem Matemática e a perspectiva sociocrítica* (BARBOSA, 2003), *Uma reflexão sobre Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica* (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006), *A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica* (OREY; ROSA, 2007) e *Uma abordagem sociocrítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da Educação Matemática Crítica* (ARAÚJO, 2009), caracterizam a modelagem na perspectiva sociocrítica, quando atendem a um conjunto de quatro categorias: participação

ativa dos alunos na construção do modelo, participação ativa do aluno na sociedade, utilização de problema não matemático da realidade e atuação do professor como mediador. Destacam que a modelagem matemática contempla a formação da cidadania dos estudantes, cuja perspectiva sociocrítica é a que mais se identifica com esse propósito.

3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Quando falamos em representação, reportamo-nos à palavra semiótica, que vem do grego *semeion*, cujo significado é signo. Para Damm (1999, p. 137), toda comunicação matemática é feita por meio de representação: "[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação". O que ensinamos são as várias representações de um objeto matemático que não é perceptível, isto é, não é acessível sensorialmente, tampouco instrumentalizado com aparelhos como o microscópio, balanças, conforme ocorre em outras áreas do conhecimento científico. Sua apreensão se dá obrigatoriamente por meio de representações.

> Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação (DAMM, 1999, p. 137).

A teoria dos registros de representação semiótica de Duval trata de uma teoria de aprendizagem matemática que considera essa diversidade de representações para o objeto matemático. No entendimento de Duval (2009), as representações semióticas, além de cumprirem a função de comunicação, desempenham um papel essencial no desenvolvimento das representações mentais, que dependem da interiorização de representações semióticas, cumprem o papel nas funções cognitivas de objetivação, que é independente daquela de comunicação, e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais, bem como a função na produção do conhecimento.

Duval (2009) introduz o termo "registros de representação semiótica" para designar os diferentes tipos de representação semiótica para o objeto matemático. Podemos falar em registro na língua natural, registro numérico, registro figural. Cada registro é heterogêneo, possuindo os próprios elementos cognitivos para o seu funcionamento.

Segundo Duval (2013) a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro a todo momento, existindo dois tipos de transformações: os tratamentos, onde as transformações de representação ficam dentro de um mesmo registro e as conversões, que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados. Assim,

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro (DUVAL, 2013, p. 14-15).

Duval (2013) considera essencial a mudança de registro para que ocorra a compreensão em matemática. O "enclausuramento" em um único registro não permite ao aluno reconhecer o objeto matemático em suas várias representações. A coordenação de registros permite a identificação das características do objeto matemático em suas diferentes representações.

Para Duval (2013) a coordenação de registros nem sempre acontece de forma natural, devendo ser estimulada pelo professor. Sob nosso olhar, uma das formas de instigar a mobilização dos diferentes registros semióticos é por meio da prática da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica.

4. Descrição da Atividade de Modelagem e Análises

A prática pedagógica desenvolvida foi uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica. Os sujeitos da pesquisa foram 18 alunos, do 8.º ano do ensino fundamental de uma escola municipal, localizada em Castelo, Espírito Santo, em 2016. Os instrumentos usados para a produção de dados foram os diários de bordo dos alunos, as produções textuais e as gravações em áudio.

Numa conversa durante uma das aulas de matemática os alunos revelaram a preocupação com a escassez de água, um problema socioambiental vivenciado por eles.

Diante da preocupação dos alunos com a falta de água fizemos as discussões sobre o tema que conduziram a questão desafiadora: Eu sou gastão de água? que consistia em que cada aluno medisse o seu consumo diário de água. O problema não-matemático passa a ser visto com o olhar da matemática onde os alunos usaram suas ferramentas em busca de uma resposta.

Nenhum procedimento de como realizar essa medição foi definido a priori exigindo dos alunos um esforço intelectual na investigação. Assim, os alunos discutiram e encontraram caminhos para realizarem a medição. Combinamos que essa medição seria feita em casa, na realidade de cada um. Os dados para estudo seriam extraídos em fontes reais do contexto sociocultural dos alunos.

Disponibilizamos aos alunos um pequeno caderno que denominamos de *diário de bordo dos alunos* para que anotassem as estratégias utilizadas na medição e a quantidade de água consumida por eles durante um dia. Identificamos três procedimentos distintos de medição, a saber:

Um grupo de alunos pesquisou na internet a quantidade de água gasta por minuto em cada atividade em que usava água. Marcava o tempo de consumo e depois multiplicava pelo valor pesquisado somando os resultados, obtendo o consumo diário de água. Outro grupo de alunos priorizou os baldes e garrafas PET, mas sentiram necessidade de pesquisar na internet o consumo de água nas descargas. Outro grupo de alunos usou como estratégia a conta de água. Os alunos desenvolveram a autonomia assumindo o processo investigativo em busca de uma solução para o desafio proposto.

Após as discussões envolvendo os procedimentos usados na medição e resultados do consumo diário de água, analisamos os diários de bordo de cada um e organizamos o consumo deles na tabela 1. Identificamos, nas colunas, a maneira como eles particionaram as medidas do seu consumo, separando em categorias. Essa tabela

foi socializada com todos os alunos.

Tabela 1: Consumo diário de água pelos alunos em categorias

Aluno	Banho	Descarga	Beber	Outros	Pia	Lavar as mãos	Esco-vação	TOTAL (Litros)
A01	180	34	2	14		2		232
A02	390		2	40		3		435
A03	360	18		30	75			483
A04	270	60				30	33	393
A05	70	56	3			2		131
A06	96	18	1	0,6		70	5	190,6
A07	45	35	3			9,8	1,7	94,5
A08	180	40	1	5			1	227
A09	240	18	0,6			12	12	282,6
A10	180	45	1	195	54			475
A11	60	18	2	55			12	147
A12	290	60	2			1,5	9	362,5
A13	150	28	1	119,5	12			310,5
A14	405	42	1,8			36		484,8
A15								191,66
A16	240	27	0,8	12			12	291,8
A17								533
A18								541,6

Fonte: Os autores.

A tabela 1 deu suporte para a elaboração de atividades envolvendo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. O objeto matemático que emergiu do processo de medição foi o número racional. Tendo a prática pedagógica de modelagem na perspectiva sociocrítica desencadeando o processo matemático de medição feito pelos alunos, elaboramos a questão em análise – Questão1, investigando a formação do conceito de número racional.

Para desenvolver a Questão 1, os alunos foram organizados em grupos espontaneamente e podiam trocar informações a qualquer momento. Depois de um tempo de reflexão nos grupos, os procedimentos e resultados eram socializadas com todos os grupos juntos.

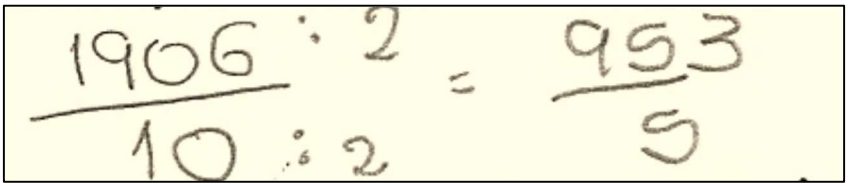
Questão 01 – Expresse o consumo de água de A06[10] encontrado na tabela 1 em forma de fração irredutível.

Os alunos trabalham com o registro em língua natural, pois precisam interpretar a questão que traz como *variáveis pertinentes* a expressão *fração irredutível* usada no enunciado da questão. Observamos da Tabela 1 que o consumo diário de água de A06 foi 190,6 litros.

A questão propõe uma conversão do registro numérico decimal exato para o registro numérico fracionário: $109{,}6=\frac{1096}{10}$ onde identificamos a mobilização de duas representações de um mesmo objeto matemático, em dois registros semióticos distintos. Ao fazerem a conversão os alunos demonstram conhecimentos sobre as propriedades que regem esses sistemas semióticos fazendo a correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes. Isso fica evidenciado, por exemplo, no uso da vírgula no numerador e na composição do denominador da fração.

Observamos na figura 1 que os alunos também fizeram um tratamento no interior do registro numérico fracionário quando simplificam $\frac{1096}{10}$ por 2, chegando a fração irredutível solicitada na questão em estudo.

Figura 1: Tratamento no registro simbólico numérico fracionário feito por A13.



Fonte: Os autores.

Observamos que as atividades de tratamento e conversão feitas pelos alunos foram criadas com base numa prática pedagógica de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica. De acordo com Duval (2013), do ponto de vista cognitivo, a conversão e a atividade de transformação representacional fundamental que conduz aos mecanismos da compreensão e isso deve ser levado em consideração no ensino da matemática.

5. Considerações Finais

[10] A fim de evitarmos a personalização dos participantes, identificamos os alunos com a letra A seguida de um número.

Os encaminhamentos dados a prática da modelagem matemática na perspectiva sociocrítica favoreceu o trabalho pedagógico alicerçado pelos pressupostos da teoria dos registros de representação semiótico. Para realizar a medição do consumo diário de água os alunos usaram recursos matemáticos como instrumentos de medição e cálculos. Particionaram o consumo de água nas atividades proporcionando a elaboração da tabela 1.

Explorando os dados reais coletados pelos alunos durante a prática da modelagem foi possível propor atividades cognitivas de tratamento e conversão para o número racional, objeto matemático que surgiu do processo de medição. Sabendo da relevância da conversão para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos notamos que a modelagem é um terreno fecundo para explorar o que a matemática tem de mais específico, a diversidade de registros de representação semiótica. O que ensinamos na verdade são representações do objeto matemático, pois ele em si não é acessível perceptivamente ou instrumentalmente.

Entendemos que a prática pedagógica de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica desenvolvida à partir das preocupações dos alunos com a escassez da água e as atividades cognitivas elaboradas com os dados das medições constituem exemplos de situações didáticas que auxiliam satisfatoriamente o ensino da matemática. Muitos outros contextos podem ser simplificados a partir da realidade dos alunos dando suporte a uma prática de modelagem associada a teoria dos registros de representação semiótica.

6. Referências

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, 2004a. p. 73-80.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004b, Recife. **Anais**... Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-154.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia. Dias. Alcântara. (org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 11-33.

SILVA, C.; KATO, L. Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica. **Revista Bolema**, v. 26, n. 43, Rio Claro, 2012. p. 817-838.

REVISITANDO PESQUISAS NA ABORDAGEM HISTÓRICO-CULTURAL SOBRE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Dayane Souza Gomes, Fabiany Cezário Dias Torezani, Dilza Côco, Sandra Aparecida Fraga da Silva

dayane.desouza@yahoo.com.br

Resumo: O trabalho, vinculado a duas pesquisas de dissertação de mestrado, apresenta um levantamento bibliográfico, realizado em bancos digitais nacionais durante o mês de janeiro e fevereiro de 2018, onde buscamos selecionar investigações sustentadas em pressupostos da teoria Histórico-Cultural que abordavam a matemática na educação infantil. Tal levantamento foi realizado na base de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Dissertações e Teses da Capes. A seleção dos trabalhos contemplados em nossa revisão observou o recorte temporal de 2010 a 2017. Nesse período, identificamos alguns trabalhos que atendiam descritores: abordagem histórico cultural, matemática e educação infantil. A escolha dos trabalhos foi realizada, inicialmente, pela leitura dos títulos e resumos. No conjunto dos trabalhos selecionados encontramos sete dissertações e uma tese. As produções selecionadas apresentam discussões que versam sobre a organização do ensino e aprendizagem, entendendo que a aprendizagem ocorre num contexto histórico e social, característico das proposições da Teoria Histórico Cultural, em que a aprendizagem e o desenvolvimento do ser humano ocorrem por meio das relações com o meio social, histórico e cultural, proposição oriunda dos estudos de Vigotski. Além disso, abordam conceitos como Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 2010) e Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983) e procedimentos metodológicos de pesquisa (CEDRO; MORETTI, 2017), neste caso, o materialismo histórico dialético. Essa perspectiva metodológica defende a análise do fenômeno de estudo em seu movimento de constituição, apostando em conceitos como de interação, diálogo, trabalho, mediação, transformação dentre outros da Teoria Histórico Cultural (REGO, 1995).

Palavras Chaves: Matemática. Teoria histórico cultural. Educação infantil. Educação matemática.

1. Introdução

O desenvolvimento de qualquer pesquisa acadêmica exige o diálogo com o acervo das outras produções já existentes. Conforme Bakhtin (2003) nos explica, toda esfera de comunicação, como a acadêmica na área de educação, possui um conjunto de enunciados que são socialmente válidos para determinada época. Assim, as novas produções adensam e alimentam esse fluxo de enunciados. Desse modo, o pesquisador para poder propor novos enunciados, relacionados a uma determinada temática de interesse, necessita conhecer e analisar um conjunto de outros trabalhos. A partir dessas compreensões é que

nos propomos realizar o trabalho de revisão de literatura sobre pesquisas que tematizam o trabalho com a matemática na educação infantil. É importante esclarecer que esse levantamento integra as proposições de desenvolvimento de duas pesquisas vinculadas ao Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) ofertadas pelo Instituto Federal do Espirito Santo. Ambas as pesquisas têm em comum o interesse em analisar a formação continuada de professores que ensinam matemática na educação infantil a partir da perspectiva histórico-cultural. A partir dessa temática buscamos entender o cenário das produções acadêmicas. Para isso, recorremos ao acervo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Dissertações e Teses da Capes para realizamos nossa busca em um recorte temporal de 2010 a 2017. Ao realizarmos o processo de revisão de literatura identificamos algumas que pesquisas realizadas eram comuns a ambas as propostas de estudos. Portanto, o objetivo deste texto é apresentar o resultado desse levantamento bibliográfico buscando evidenciar como a formação continuada de professores que ensinam matemática na educação infantil tem sido debatida no campo da pesquisa a partir da perspectiva histórico-cultural.

Destacamos que antes de dialogar com pesquisas disponibilizadas em bancos nacionais, buscamos conhecer o acervo de produções sobre essa temática no contexto do Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Matemática (Educimat). Dos 140 trabalhos publicados no período entre 2013 e 2017, por meio da leitura dos títulos, observamos que não houve nenhuma ocorrência de pesquisa direcionada a matemática na educação infantil. Assim, entendemos essa ausência de registros como um espaço potencial para nossa proposta de investigação que é a formação continuada de professores que ensinam a matemática na educação infantil na perspectiva histórico cultural.

A partir desse levantamento inicial, buscamos fazer novas consultas, mas privilegiando bases de dados nacionais, utilizando descritores específicos, dentre eles o termo Teoria Histórico Cultural. Esse termo foi chave para orientar nossa seleção, considerando que os pressupostos dessa abordagem irão fundamentar nossas proposições de estudos. Antes de apresentar as pesquisas contempladas em nosso levantamento, evidenciamos alguns elementos da THC importantes para o delineamento do estudo que estamos empreendendo.

2. Um Pouco da Teoria Histórico – Cultural (THC)

A Teoria Histórico-Cultural tem seu fundamento nas proposições de Vigotski[11], psicólogo russo que buscou compreender os processos de formação das funções psíquicas superiores, para isso, se apropriou das proposições marxista sobre a concepção de trabalho e processo de humanização. Vigotski (2007) e um grupo de colaboradores conhecidos como *Troika*, formado por estudiosos como Leontiev e Luria, buscaram analisar o desenvolvimento humano em seu processo de constituição tomando como base metodológica os conceitos de dialética, historicismo e materialismo, ao compreender que o desenvolvimento do homem ocorre por meio das relações estabelecidas culturalmente e historicamente constituídas a partir da necessidade de melhoria da qualidade de vida. Por este viés, a necessidade fomenta no homem a motivação necessária para que ele haja sobre a natureza modificando-a ao mesmo tempo em que sofre modificações pois, a ação do homem sobre a natureza, favorece o desenvolvimento da melhoria da qualidade de vida, bem como seu desenvolvimento psicológico. Diferente dos animais a ação do homem no mundo é provida de uma intencionalidade que emerge da necessidade pessoal ou social.

> Em la própria organización corporal de los indivíduos está implícita la necessidade de establecer um contacto activo com el mundo eterior, para subsistir deben actuar, producir los médios que necesitan para la vida. Al influir sobre el mundo exterior lo transforman y con estp se transforman también. Por eso, todo lo que son está determinado por su atividad que a su vez está condicionada por el nível de desarrolho que han alcanzado sus médios y formas de organización (LEONTIEV, 1983, p.16).

Partindo deste pressuposto, Leontiev (1983) dedicou-se ao estudo da atividade humana, sistematizando assim o conceito de atividade entendendo que:

> La atividad es una unidad molar no aditiva de la vida del sujeto corporal y material. Em um sentido más estrecho, es decir, a nível psicológico, esta unidad de la vida se ve mediada por el reflejo psíquico, cuya función real consiste en que este orienta o sujeito en el mundo de los objetos. En otras palavras, la actividad no es uma reacción, así como tampoco um conjunto de reacciones, sino que es un sistema que posee uma estrutura, passo internos y conversiones, desarrollo (LEONTIEV, 1983, p.66).

[11] Utilizamos a grafia Vigotski ao referenciar as contribuições do autor e Vigotski, Vygotski ou Vygotsky conforme transcrição da obra referendada.

Deste modo, a atividade como conceito é dotada de uma estrutura onde há elementos essenciais que a configuram. Estes elementos, que compõem a estrutura geral do conceito de atividade, são apresentados por Moura (2010), ao pressupor:

> [...] que a sua estrutura geral seja composta por duas características centrais, a de orientação e a de execução. Em termos de orientação, a atividade compreende as necessidades, os motivos, o objeto e as tarefas; em termos de execução, a atividade é constituída pelas ações e suas operações (MOURA, 2010, p. 22-23).

É por meio da atividade que o sujeito adquire conhecimentos que contribuirão para a formação das funções psíquicas superiores. Portanto, toda Atividade deve ser caracterizada pela necessidade, motivo, ações, operações e objetivo. Essas características não podem ser pensadas de forma isolada e sim em conjunto. Ao pensarmos no contexto escolar, podemos destacar que:

> A educação como atividade nos faz refletir, também, sobre as atividades desenvolvidas no processo pedagógico. O objeto da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade – teórica e prática -, é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais como forma de constituição humana (MOURA, 2010, p. 24).

Nesse sentido cabe destacar a atividade principal do professor, que tem a função de organizar os conhecimentos construídos historicamente e socialmente e a atividade principal da criança da educação infantil, que é aprendizagem por meio dos jogos e das brincadeiras. Partindo desta premissa, surge então o conceito de Atividade Orientadora de Ensino- AOE, que busca promover a interação entre as duas atividades principais que predominam o contexto da sala de aula.

> [...] a AOE é a mediação na atividade do professor, que tem como necessidade o ensino de um conteúdo ao sujeito em atividade, cujo objetivo é a apropriação desse conteúdo entendido como um objetivo social. Nessa perspectiva, a AOE constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do individuo no movimento de apropriação do conhecimento (MOURA, 2010, p. 100).

A partir destas proposições para a Educação na Teoria Histórico Cultural, revistamos os bancos digitais de dissertações e teses, a fim de identificar produções realizadas com base nesta abordagem teórica.

3. Metodologia

O levantamento foi realizado nas bases de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Dissertações e Teses da Capes. Para tal, fizemos um recorte temporal de trabalhos produzidos no período de 2010 por ser o ano de promulgação e divulgação as Diretrizes Curriculares para a Educação Infantil (BRASIL, 2010) até o final do ano de 2017. A busca foi realizada utilizando os descritores: abordagem histórico cultural, matemática, educação infantil e atividade orientadora de ensino. A partir destes descritores, selecionamos o total de oito trabalhos sendo sete dissertações e uma tese. A seleção foi feita observando inicialmente o Título e o resumo, a fim de identificarmos se o referencial teórico correspondia a nossa proposta de pesquisa, neste caso, a Teoria Histórico Cultural, e após a identificação realizamos a leitura dos trabalhos selecionados. Apresentaremos a seguir resumidamente as pesquisas selecionadas (Quadro1).

Quadro 1: Pesquisas selecionadas na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e no Portal da Capes

DISSERTAÇÃO	• *Formação de conceitos matemáticos na Educação Infantil na perspectiva histórico-cultural* (SILVA, 2010).
DISSERTAÇÃO	• *Matemática na Educação Infantil? Contribuições da Atividade Orientadora de Ensino para (re) organização da prática docente* (AMORIM, 2015).
DISSERTAÇÃO	• *Criança, infância e conhecimento matemático: um estudo a partir da teoria histórico-cultural* (EUZÉBIO, 2015).
DISSERTAÇÃO	• *Educação Infantil e Matemática: concepções e conhecimentos de professoras que atuam na Pré- Escola* (SCHAIDA, 2014).
DISSERTAÇÃO	*A criança da educação infantil e a linguagem matemática: relações interdependentes no processo de ensino e aprendizagem* (FERRO, 2016).
DISSERTAÇÃO	*O planejamento e a atividade principal da criança: vivências de futuras professoras na educação infantil* (MARAFIGA, 2017).
DISSERTAÇÃO	• *Organização do ensino da matemática na educação infantil: análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal de ensino* (ARAÚJO, 2016)
TESE	• *Princípios para a organização do ensino na educação infantil na perspectiva histórico-cultural: Um estudo a partir da análise da prática do professor* (PASQUALINI, 2010).

Fonte: Os autores.

3.1 Pesquisas selecionadas

A dissertação *Formação de conceitos matemáticos na Educação Infantil na perspectiva histórico-cultural* (SILVA, 2010) teve como objetivo acompanhar o processo de desenvolvimento de formações mentais a partir do desenvolvimento do plano de ensino elaborado conjuntamente pela professora da turma e pela pesquisadora. Investigou um grupo de 20 crianças de 5 anos, a partir da teoria Histórico Cultural. Concluiu-se que, a apropriação de conceitos matemáticos pela criança, deve ser gerada por uma motivação levando à aprendizagem. Outro dado conclusivo, refere-se a intencionalidade do professor em sua prática pedagógica, além de evidenciar a importância que o mesmo deve ter sobre o conhecimento matemático e fundamentação teórica.

Na dissertação *Matemática na Educação Infantil? Contribuições da Atividade Orientadora de Ensino para (re) organização da prática docente* (AMORIM, 2015), o objetivo foi investigar a potencialidade do conceito de Atividade Orientadora de Ensino – AOE (MOURA, 1996, 2010) como propiciador do movimento de mudança da prática docente, a partir de uma nova organização do ensino da matemática na educação infantil. A metodologia utilizada foi o materialismo histórico dialético, com base nisto, desenvolveu um curso de extensão para coleta de dados. A análise dos dados evidenciou que houve mudanças nas práticas pedagógicas dos professores decorrentes de apropriações ou ressignificação de conceitos matemáticos, e que estas mudanças ocorreram neste movimento de ensino proporcionado na formação, evidenciando a potencialidade do conceito da AOE.

A dissertação *Criança, infância e conhecimento matemático: um estudo a partir da teoria histórico-cultural* (EUZÉBIO, 2015), teve por objetivo compreender as relações entre criança, infância e conhecimento matemático com fundamento na análise do Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil, tendo como base os aportes da Teoria Histórico-Cultural. O estudo foi realizado em conjunto com o Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica e com o Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Infância, Educação e Escola. Concluiu-se que apesar da importância da matemática para a formação do sujeito, há uma escassez de produções que abordam a matemática para a criança na perspectiva da Teoria Histórico-cultural.

A dissertação *Educação Infantil e Matemática: concepções e conhecimentos de professoras que atuam na Pré-Escola* (SCHAIDA, 2014), buscou compreender as concepções e conhecimentos de professores atuantes na pré-escola sobre a matemática e as concepções de educação infantil. Foi feita uma pesquisa qualitativa que envolveu

quatro professores da EI. Concluiu-se que as professoras estão em processo de possível transição entre as perspectivas tradicional e contemporânea, em suas concepções e conhecimentos sobre a educação infantil. Sobre a matemática, nesta etapa de ensino, foi possível identificar uma tendência à perspectiva tradicional de ensino.

Na Dissertação *A criança da educação infantil e a linguagem matemática: relações interdependentes no processo de ensino e aprendizagem* (FERRO, 2016), o objetivo foi investigar a manifestação da linguagem matemática pelas crianças da educação infantil e sua contribuição para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores em situações escolares, controlando as diferentes quantidades, grandezas e formas. A pesquisa foi realizada com 24 crianças com idade entre 3 e 4 anos, no período de 4 meses, no ano de 2015. Concluiu-se, que a apropriação da linguagem matemática na EI contribui para a formação das funções psicológicas superiores, desde que haja uma ação mediada.

A dissertação *O planejamento e a atividade principal da criança: vivências de futuras professoras na educação infantil* (MARAFIGA, 2017) buscou investigar o processo formativo de futuros professores na organização do ensino na Educação Infantil. Desenvolvida no âmbito do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), especificamente do Subprojeto Interdisciplinar Educação Matemática (PIBID/InterdEM) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), envolveu a participação de 4 acadêmicas do curso de Licenciatura em Pedagogia e do curso de Licenciatura em Educação Especial, ambos da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).Concluiu-se que houve compreensão por meio das acadêmicas sobre a importância do planejamento e do ensino intencional, tomando como ponto de partida a atividade principal da criança e a importância de despertar nas crianças a necessidade de aprender.

A dissertação *Organização do ensino da matemática na educação infantil: análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal de ensino* (ARAÚJO, 2016) teve por objetivo analisar as orientações para a organização do ensino da matemática na educação infantil, com fundamentos na perspectiva histórico-cultural, de um município situado no sul do Estado de Santa Catarina, Brasil. Para isso, realiza uma análise dos documentos oficiais da educação brasileira como: RCNEI (BRASIL, 1998), DCNEI (BRASIL, 2010), dialogando com a Teoria Histórico Cultural (AOE/Teoria da Atividade). Concluiu-se, que a reconstrução da proposta da EI com base na THC, foi uma demanda originada com a ampliação do Ensino Fundamental para nove anos. Nesse

cenário, evidenciou-se a necessidade de aprofundar o conhecimento sobre a THC na Educação Infantil e de organizar o ensino de acordo com a proposta teórica.

A Tese *Princípios para a organização do ensino na educação infantil na perspectiva histórico-cultural: Um estudo a partir da análise da prática do professor* (PASQUALINI, 2010), teve por objetivo sistematizar princípios para a organização do ensino na educação infantil a partir da perspectiva histórico-cultural e como objeto de investigação, a prática social do professor que atua na EI. Foi realizada uma análise teórica da prática em turmas do maternal, jardim I e jardim II, e por meio de uma formação continuada que envolveu os professores e a diretora da instituição. Elaborou-se um modelo teórico da prática do ensino na EI. Concluiu-se que, o modelo teórico da prática mostrou-se uma ferramenta efetiva, pois, permitiu analisar a prática cotidiana da unidade escolar com base na psicologia histórico-cultural, culminando na organização do ensino da educação infantil.

Por se tratar de um artigo, buscamos apresentar resumidamente as pesquisas selecionadas e analisadas.

Por este viés, compreendemos que uma pesquisa científica é uma construção da historicidade do fenômeno que será analisada por meio do olhar dos seus referenciais, porém, a mesma deverá ser vista dialeticamente. Neste sentido, identificamos que a nossa pesquisa, assim como no trabalho de Amorim (2015), tem os seus princípios metodológicos fundamentados no materialismo histórico dialético, uma vez que este método considera indissociável a relação da natureza social e histórica do indivíduo ou fenômeno e busca entender o objeto de formação em seu movimento de constituição. Assim, o MHD é uma metodologia propícia a natureza do fenômeno que iremos investigar, pois, favorece captar indícios do processo de mudança que pode ocorrer em processos de formação de professores. Moura (2017, p.33) afirma que o sujeito ao iniciar a formação entra de uma forma e ao longo deste processo sofre mudanças e/ou transformações. Realça que

> Uma análise histórica, portanto, diz respeito a uma análise que capte o processo de transformação das propriedades e/ou relações presentes em um dado fenômeno, isto é, que capte o processo de desenvolvimento do fenômeno, naquilo que ele é, no que foi e no que pode vir a ser.

Neste contexto de indicações, pretendemos captar o fenômeno em seu processo de constituição. Mas como não conseguiremos abarcar o todo, recorreremos ao conceito de

isolados proposto por Caraça, no qual a revelação do momento é possível por meio de um recorte da realidade sem prejuízo da apreensão da totalidade.

4. Algumas Considerações

A revisão de literatura sistematizada nesse artigo possibilitou compreender modos de apropriação de conceitos da Teoria Histórico Cultural na área de pesquisa relacionada à matemática na Educação Infantil. Nesse sentido, as pesquisas analisadas favoreceram a compreensão de como vem sendo constituídos estudos sobre a matemática na educação infantil na perspectiva histórico-cultural. Neste texto buscamos destacar de forma breve alguns dados característicos das pesquisas analisadas. Além disto, o processo de análise permitiu que observássemos a estrutura organizacional dos trabalhos, contribuindo para ampliação de possibilidades de organização do desenvolvimento de nossas pesquisas, entretanto, o objetivo deste trabalho era apresentar brevemente pesquisas que foram selecionadas no processo de revisão de literatura sobre a formação continuada de professores que ensinam matemática na educação infantil.

Além disso, as pesquisas mostram contribuições do conceito de AOE para pensar questões sobre a aprendizagem e o desenvolvimento humano por meio da apropriação de conceitos científicos. Esse conceito que estabelece vinculações com a noção de atividade de Leontiev, aponta para possibilidades de discutir o processo de ensino e a formação docente, pois envolve relações com o trabalho dos professores e dos alunos. Assim, a leitura do conjunto dos textos pontuou diferentes contribuições conceituais para a arquitetura teórico metodológica de nossos estudos.

5. Referências

AMORIM, Gisele Mendes. **Matemática na educação infantil?** Contribuições da atividade orientadora de ensino para a (re)organização da prática docente. 2015. 187f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-. Graduação em Educação, 2015.

ARAUJO, Marlova Neumann. **Organização do ensino da matemática na educação infantil:** análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal

de ensino**.** Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, SC, 2016.

BAKHTIN, M. Estética da criação verbal. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BRASIL. **Diretrizes curriculares nacionais para a educação infantil.** Brasília, DF: MEC/SEB, 2010.

BRASIL. **Referenciais curriculares nacionais para a educação infantil**. Vols. 1 e 3. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CEDRO, Wellingon Lima.; MORETTI, Vanessa Dias. (organizadores). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural**: um olhar sobre as pesquisas Campinas, SP: Mercado de Letras, 2017.

EUZEBIO, Juliana da Silva. **Criança, infância e conhecimento matemático:** um estudo a partir da teoria histórico-cultural**.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2015.

FERRO, Lussuede Luciana de Sousa. **A criança da educação infantil e a linguagem matemática:** relações interdependentes no processo de ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2016.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia e personalidad**. Havana: Editorial Pueblo y Educacion, 1983.

MARAFIGA, Andressa Wiedenhoft. **O planejamento e a atividade principal da criança:** vivências de futuras professoras na educação infantil**.** 2017. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (Coord.) **Controle da Variação de Quantidades: atividades de ensino**. São Paulo: FEUSP, 1996. Textos para o Ensino das Ciências, n. 7.

_____ **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural** – Brasília-DF: Liber Editora Ltda., 2010.

PASQUALINI, Juliana C. **Princípios para a organização do ensino na educação infantil na perspectiva histórico-cultural**: um estudo a partir da análise da prática do professor. 2010. 268 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2010.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação.** Petrópoles, RJ: Vozes, 1995.

SCHAIDA, Lysania Frisséllí Ferreira dos Santos. **Educação infantil e matemática:** Concepções de professoras que atuam na pré-escola**.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Educação. Cuiabá, 2014.

SILVA, Iraci Balbina Gonçalves. **Formação de conceitos matemáticos na educação infantil na perspectiva histórico-cultural.** 2010. 180 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

VIGOTSKY, Lee Semenovitch. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

SABERES DE LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES EM UMA INTERVENÇÃO COM CARACTERÍSTICAS DE ENGENHARIA DIDÁTICA

Nelson Victor Lousada Cade, Maria Auxiliadora Vilela Paiva

nvlcade@hotmail.com

Resumo: Este artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado vinculada à linha de formação de professores que ensinam matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Educimat/Ifes. A pesquisa teve por objetivo refletir a articulação entre o conhecimento científico e o escolar, numa turma de licenciatura, a partir da relação com os saberes que os licenciandos elaboram sobre o conteúdo de equações diofantinas lineares (EDL). A metodologia da pesquisa utilizou de alguns aspectos da Engenharia Didática e da pesquisa Intervenção Pedagógica. Consistiu de uma intervenção pedagógica numa turma de 5º período de uma Licenciatura em Matemática, na disciplina de Teoria dos Números com foco na análise de como esse grupo (re) constrói os conceitos e procedimentos relacionados ao conteúdo de EDL, tendo em vista sua futura prática docente. Alguns autores e suas ideias foram fundamentais na constituição da base teórica da pesquisa, como os saberes do conteúdo e pedagógico do conteúdo propostos por Lee Shulman, além da teoria do canadense Brent Davis que aborda o estudo do conceito, por meio dos trabalhos colaborativos, na formação continuada. A produção de dados ocorreu, principalmente, ao longo de cinco encontros, em que os alunos participantes tiveram momentos de (re) construção do conceito de EDL, sejam nos momentos individuais como nas discussões coletivas. Nessa produção de dados foram utilizados questionários, relatos dos participantes e observações dos encontros, utilizando o recurso de gravações de áudio e vídeo. O primeiro encontro consistiu na realização de um teste individual, com o objetivo de levantar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema a ser trabalhado. O segundo encontro, consistiu na resolução de problemas em grupo, com discussões no coletivo. No terceiro encontro os alunos se posicionaram como futuros professores da educação básica, e formularam um problema que recaísse em uma EDL, além de definirem a metodologia de trabalho e a possível turma a ser trabalhada. No quarto encontro realizamos a formalização do conteúdo, por meio da demonstração dos teoremas de EDL. E no quinto encontro, fechamos a intervenção com uma prática realizada no laboratório de informática, utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra. O objetivo de articular o conhecimento científico e escolar foi alcançado, visto que o grupo trabalhado, de um quinto período da formação inicial, se colocou ao longo da intervenção, como futuros professores, refletindo a todo o momento sobre os saberes da educação básica articulado aos conhecimentos científicos. A partir deste estudo pretendemos indicar possíveis caminhos para os cursos de formação de professores no que concerne ao trabalho com o conteúdo de EDL, valorizando a reflexão sobre conteúdo científico e a prática docente.

Palavras Chaves: Formação Inicial. Engenharia Didática. Equações Diofantinas Lineares.

1. Introdução

Este trabalho refere-se a uma pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática- EDUCIMAT, ofertado pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Está inserido na linha de pesquisa formação de professores, mais especificamente a formação inicial, por se tratar de um trabalho realizado em uma turma de licenciatura em matemática tendo como tema gerador o conteúdo de equações diofantinas lineares (EDL), bem como os saberes relativos a este conteúdo, tendo em vista a futura prática docente do licenciando. É preciso promover a construção dos saberes docentes de modo a articular os conhecimentos científicos com aqueles adquiridos pelo professor em sua experiência de vida e profissional. Esses conhecimentos influenciam a prática de sala de aula e têm estado presentes em pesquisas em educação matemática, como por exemplo, em Rangel, Giraldo e Maculan (2015).

Salientamos a necessidade de pesquisas que retratem a formação inicial de professores, por acreditar que as discussões e reflexões realizadas em uma turma de licenciatura em matemática são primordiais para a construção de saberes da docência e consequentemente para o sucesso dos futuros professores em sala de aula. Em especial, contribuir com reflexões e alternativas pedagógicas que possam contribuir para o ensino aprendizagem de conteúdos relacionados à Teoria dos Números, que segundo Resende (2007) deve constar de: números inteiros, divisibilidade e equações diofantinas lineares.

A pesquisa aqui retratada teve por objetivo refletir a articulação entre o conhecimento científico e o escolar, numa turma de licenciatura, a partir da relação com os saberes que os licenciandos elaboram sobre o conteúdo de EDL.

2. Referencial Teórico

A base teórica desta pesquisa aborda aspectos da formação inicial de professores, a articulação entre o conhecimento científico e o escolar, além da teoria do canadense Brent Davis que trata do estudo do conceito, por meio dos trabalhos colaborativos, na formação continuada.

Existe uma lacuna na formação inicial de professores, entre o que se aprende na licenciatura, e o que se ensina. É preciso que essa formação promova a construção dos saberes docentes de modo a articular os conhecimentos científicos com aqueles adquiridos pelo professor em sua experiência de vida e profissional. Considerando em

especial um curso de licenciatura em matemática, é preciso que além de adquirir saberes de conteúdo matemático, o licenciando, futuro professor, precisa saber articulá-los com o conhecimento matemático escolar. Portanto, as "pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer" (NACARATO e PAIVA, 2008, p. 14).

Gatti (2010) que trata das características e problemas da formação de professores no Brasil aponta não terem ocorrido avanços significativos. A autora, ao analisar projetos pedagógicos de cursos de licenciatura de instituições públicas e privadas das cinco regiões do país, revela um panorama desolador quanto às condições dos cursos de formação de professores para a educação básica mostrando a necessidade urgente de uma revisão profunda nas estruturas dos cursos. Uma das causas apontadas pela autora para essa situação é a ausência de um eixo formativo para a docência que discuta as características do ambiente escolar, como a realidade do aluno e o contexto social em que se insere a escola. A autora aponta que alguns cursos de licenciatura ao focarem demais no conteúdo deixam de refletir sobre outros aspectos da docência necessários à atuação do professor.

> A forte tradição disciplinar que marca entre nós a identidade docente e orienta os futuros professores em sua formação a se afinarem mais com as demandas provenientes da sua área específica de conhecimento do que com as demandas gerais da escola básica, leva não só as entidades profissionais como até as científicas a oporem resistências às soluções de caráter interdisciplinar para o currículo [...] (GATTI, 2010, p. 1375).

Assim, se faz necessário pensar em propostas de intervenção em cursos de licenciatura, no sentido de analisar de que modo o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo vêm sendo construídos. Shulman (1987) estabelece sete categorias de conhecimento de base para o ensino, contemplando o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico geral, o conhecimento curricular, o conhecimento pedagógico do conteúdo, o conhecimento dos alunos e de suas características, o conhecimento dos contextos educacionais e o conhecimento dos fins educacionais, que são os valores sociais, propósitos, bases filosóficas e históricas.

O autor destaca a singularidade do conhecimento pedagógico do conteúdo, denominado por ele de PCK ("Pedagogical Content Knowledge"), diante das outras categorias, ou seja, é o conhecimento especializado que o professor possui para ensinar determinado

conteúdo, tornando-o mais compreensível ao aluno, sendo este conhecimento considerado típico do professor.

Nesta pesquisa, serão consideradas duas categorias propostas por Shulman (1987): conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, no sentido de investigar quais conhecimentos do conteúdo de EDL o grupo pesquisado possui ou (re) constrói.

Para que fosse possível o desenvolvimento da pesquisa foi preciso planejar uma sequência de atividades que verificasse a articulação entre o conhecimento científico e o escolar. Esse planejamento visava propor alternativas em relação ao modelo tradicional de ensino do conteúdo de equações diofantinas lineares, valorizando momentos de construção de saberes na licenciatura que estivessem articulados à prática profissional docente.

Ao organizar essa intervenção, os autores utilizaram algumas características da engenharia didática, que estuda os processos de ensino e aprendizagem de certo conteúdo, além dos princípios de uma abordagem investigativa, conhecida como *Concept Study*, traduzida como "Estudo do Conceito (EC)". Essa abordagem é sustentada pelas reflexões coletivas de professores e foi proposta pelo pesquisador canadense Brent Davis e seus colaboradores (2009). Os autores do EC definem essa metodologia como uma estrutura de colaboração e interação entre professores em que eles constroem e (re) constroem seus entendimentos sobre um determinado conceito matemático, a partir de uma questão inicial que direciona as discussões, tendo como objetivo o ensino. O EC está estruturado em quatro ênfases principais: realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas) (DAVIS; RENERT, 2012, 2014). Cabe destacar que essas ênfases não apresentam uma estrutura rígida podendo variar entre si, num processo de inda e vinda.

As realizações podem ser descritas como as diversas formas, por exemplo, definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos, entre outros, que o professor utiliza para comunicar um determinado conceito matemático (DAVIS, 2012; DAVIS e RENERT, 2014). Essas realizações não são entendidas como certas ou erradas, mas oriundas de um entendimento vindo da tarefa de ensinar.

Os panoramas são obtidos a partir da lista de realizações (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Essas estruturas são entendidas aqui como as relações existentes entre as realizações que

apresentam características semelhantes, já em relação à ênfase vinculações seu objetivo é refletir de que modo cada realização implica no entendimento de determinado conceito.

Nessa pesquisa, todos os encontros tiveram como característica o desenvolvimento via resolução de problemas, apresentando então a questão disparadora abordada no estudo do conceito de equação diofantina linear.

O tema EDL, segundo Zehursen, Rakes e Meece (2005) é tratado no trabalho mais conhecido de Diofante, Arithmetica, que originalmente continha 13 livros, mas apenas 6 se preservaram, consistindo de uma coleção de problemas resolvidos de aplicação de álgebra. Milies e Coelho (2003) apontam que na Arithmetica, Diofante buscava encontrar as soluções inteiras ou racionais não negativas de equações indeterminadas, hoje conhecidas como equações diofantinas. No estudo de uma EDL, surgem três perguntas principais:

i) A EDL tem solução?

ii) Se sim, essas soluções são finitas ou infinitas?

iii) Quais são essas soluções?

Uma EDL é uma equação do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros dados e as soluções x e y procuradas, também pertencem ao conjunto Z. A seguinte proposição permeia este estudo: Uma Equação Diofantina Linear: $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, d divide c, onde $d = mdc\ (a, b)$.

A seguir, serão relatados os procedimentos metodológicos, que fizeram parte dessa pesquisa.

3. Percurso Metodológico

É uma pesquisa de natureza qualitativa tendo em vista a possibilidade de maior aproximação entre o pesquisador, o ambiente e a situação que será pesquisada, além de gerar um material rico em descrições (LÜDKE e ANDRÉ, 1986).

A pesquisa teve, também, características da engenharia didática. Como em toda e qualquer metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática também segue algumas fases, as quais são importantes e de extrema relevância quando o desejo é utilizá-la como referencial teórico-metodológico e ter êxito no estudo.

Para Pais (2011), são elas: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise à priori; 3) aplicação de uma sequência didática e 4) análise à posteriori e a avaliação.

Nesse trabalho uma das utilizações da engenharia didática se deu na etapa de concepção e análise à priori, em que os autores realizaram um estudo das possíveis estratégias para a solução dos problemas propostos, assim como os possíveis erros e acertos que poderiam ser cometidos pelos licenciandos. Essa utilização será descrita na tabela a seguir e diz respeito ao problema trabalhado no primeiro encontro que será mostrado adiante nesse artigo.

Tabela 1: A Engenharia Didática na Pesquisa

Fase da Engenharia Didática	Utilização na pesquisa
Concepção e análise à priori	Previsão de estratégias (E) de resolução: E1: Estimativas ou cálculo mental, por meio de tentativa e erro; E2: Equacionamento do problema na busca de soluções. E3: Utilizar a divisão euclidiana na busca de uma solução particular.
Concepção e análise à priori	Possíveis erros: E1: O aluno não considerar que o problema se restringe aos inteiros positivos; E2: O aluno não verificar a solução encontrada que atenda o problema.

Fonte: Os autores.

Delineado o percurso metodológico iniciamos a produção de dados, que ocorreu no primeiro semestre de 2017, com a turma do 5º período da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Vitória, na disciplina de Teoria dos Números. No primeiro encontro foi pedido aos alunos que preenchessem uma lista com nome e e-mail e receberam um questionário online para que respondessem a algumas perguntas sobre suas características pessoais, como por exemplo, se a escolha pela licenciatura em matemática havia sido sua primeira opção de curso, bem como se conheciam o conteúdo de EDL.

Os dados foram produzidos a partir das respostas dos questionários; durante as resoluções dos problemas, fosse individual ou em grupos, por meio das folhas de registros dos licenciandos; e das observações dos pesquisadores, utilizando de gravações em áudio e vídeo. Por fim, também foram analisadas as repostas do questionário final em que os

participantes tiveram a oportunidade de avaliar a proposta de intervenção pedagógica aplicada.

Como ao longo dos 5 encontros ocorreram momentos de trabalhos em grupo, no primeiro dia da intervenção foi pedido aos licenciandos, que os grupos formados fossem mantidos até o final da pesquisa. Desse modo, foi possível avaliar por meio das diferentes atividades se ocorreu de fato a articulação entre o conhecimento científico e o escolar. O objetivo de cada encontro será detalhado na tabela a seguir.

Tabela 2: Dias e Objetivos das Intervenções

Dias	Organização	Objetivo
Dia 1 – 13/06/2017	Individual/Grupo	Levantar os conhecimentos prévios dos licenciandos e resolver problemas de EDL em grupo e discutir no coletivo as soluções.
Dia 2 – 20/06/2017	Grupo/coletivo	Resolver problemas de EDL em grupo e discutir no coletivo as soluções.
Dia 3 – 23/06/2017	Grupo/coletivo	Propor um problema que recaia em uma EDL.
Dia 4 – 27/06/2017	Grupo/coletivo	Demonstrar os Teoremas de EDL.
Dia 5 – 04/07/2017	Duplas/coletivo	Utilizar o software Geogebra para construção do gráfico de uma EDL.

Fonte: Os autores.

O objetivo geral das intervenções foi de discutir os conceitos matemáticos sobre Equação Diofantina Linear a partir de atividades proposta. Como objetivos específicos elencamos:

i) identificar se os licenciandos tinham algum conhecimento prévio sobre os conceitos de EDL;

ii) promover o diálogo e a socialização das respostas;

iii) analisar, junto aos participantes, as estratégias de resolução apresentadas nas discussões coletivas.

iv) promover a reflexão coletiva diante das situações propostas nas intervenções.

4. Relato Parcial da Produção de Dados

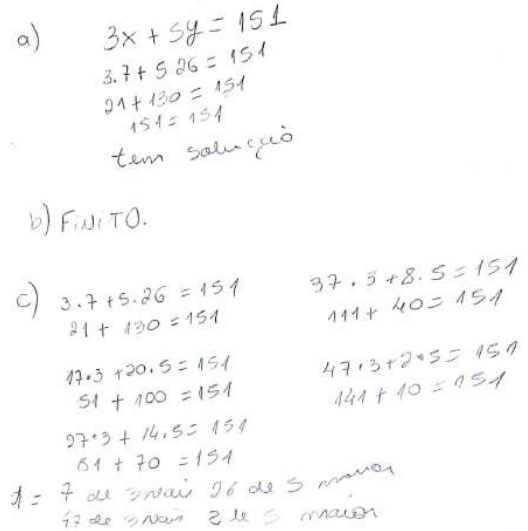
Uma das etapas do primeiro encontro consistiu na resolução de um problema em grupo. Os alunos se dividiram entre três a quatro componentes por grupo. Após resolverem o problema, ainda no primeiro encontro, houve um momento de discussão coletiva das diferentes estratégias de resolução no quadro. Vale ressaltar que nos três primeiros encontros dessa intervenção não se abordou formalmente o conteúdo de EDL. Os problemas propostos aos licenciandos, nos momentos de trabalho individual e em grupo, foram resolvidos de modo livre por eles, surgindo desse modo as mais variadas estratégias de resolução. Isso mostra o quão ricas podem ser as discussões em sala de aula, já que diferentes estratégias permitem olhares distintos sob um mesmo problema. Além da importância de se trabalhar problemas contextualizados em sala de aula, facilitando o entendimento do aluno. O problema trabalhado no primeiro encontro será apresentado abaixo.

Figura 1: Problema proposto aos licenciandos

Um consumidor deseja pagar uma compra de supermercado, no valor de R$ 151,00, com tickets de 3 e 5 reais. (SILVA, Valdir Vilmar Da. Números Construção e Propriedades. 1ª Edição. Goiânia: UFG, ano 2003). Pergunta-se: A equação tem solução? Se tem solução, o número de soluções é finito ou infinito? Se tem solução, quais são estas soluções? Qual é o menor número de tickets que pode ser usado? E o maior?

Fonte: Os autores.

Figura 2: Resolução do Problema do encontro 1 – Grupo "Os pensantes"



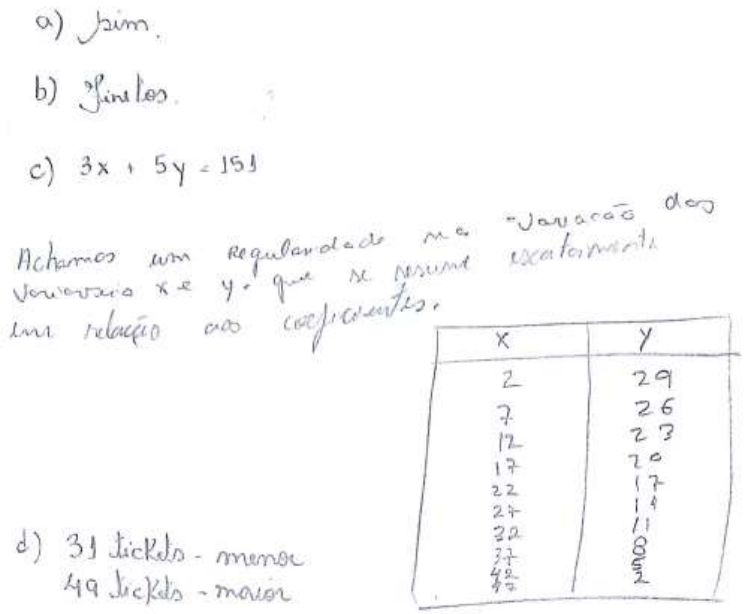
Fonte: Os autores.

Essa resolução cabe ser destacada, pois a estratégia escolhida pelo grupo consiste na representação da equação algébrica 3x + 5y = 151, como caminho para solucionar o problema. Observamos que o grupo respondeu de modo errado a letra d do problema, ao

afirmar que a menor quantidade possível para que o consumidor pague suas compras com tickets de 3 e 5 reais seria dada pelo par (x, y) = (7, 26), totalizando 33 tickets. Mas respondeu corretamente ao afirmar que o par de valores (47, 2) equivale a maior quantia de tickets que o consumidor pode vir a gastar. É interessante observar que, o grupo desenvolveu estratégias de resolução para a situação proposta.

A seguir apresentamos a resolução do mesmo problema pelo grupo identificado como "Infinito".

Figura 3: Resolução do Problema do encontro 1 – Grupo "Infinito"



Fonte: Os autores.

A resolução do grupo identificado como "Infinito" merece destaque, pois ao representar a equação e buscar as soluções que satisfariam o problema, o grupo destaca: "*Achamos uma regularidade na variação das variáveis x e y que se resume exatamente em relação aos coeficientes"*. Isso de fato é interessante, pois o grupo adianta algo que seria discutido apenas no quarto encontro da intervenção, com a formalização do teorema de resolução de uma EDL e discussão dos coeficientes da equação nas soluções particulares.

Os dados produzidos nesse encontro dão a ideia de que existem características da teoria de Shulman (1986), pois ocorrem indícios do saber pedagógico do conteúdo a partir do momento que ocorre a valorização de diferentes alternativas de representação das ideias, ligadas ao saber escolar. Isso aponta que os licenciandos são capazes de articular um saber científico do conteúdo de equação diofantina linear com um saber pedagógico, que será

primordial no momento em que atuarem como professores articulando esses saberes para tornar-se um conteúdo compreensível ao aluno.

5. Analisando e Tecendo Conclusões

Neste recorte da pesquisa nos atemos num dos encontros na disciplina de Teoria dos Números. As estratégias de resolução trazem aspectos do estudo do conceito, proposto por Brent Davis e seus colaboradores (2009), pois os licenciandos fizeram realizações ao resolverem os problemas em pequenos grupos e apresentarem as soluções encontradas no coletivo. Uma das realizações aqui destacada diz respeito ao uso de equações algébricas para representar a situação problema. Além disso, essas realizações puderam ser classificadas no panorama matemática formal, já que eles fazem uso de uma equação algébrica que represente o problema proposto. E por fim, também consideramos presentes as vinculações, que apareceram, sejam na comunicação do entendimento dos conceitos, nas estratégias utilizadas pelos grupos, ou pela interpretação dos resultados.

Com relação aos objetivos da pesquisa, por meio da intervenção, consideramos que foram atingidos, pois foi possível investigar os conhecimentos prévios dos alunos, seja por meio das atividades individuais ou em grupos, como também pelos momentos em que eles se dispuseram a ir ao quadro, apresentar a solução proposta das tarefas. Também ocorreram importantes discussões ao analisar as estratégias que eram apresentadas, além dos momentos de reflexão sobre outras possíveis soluções, contribuindo desse modo para a (re) construção sobre os conceitos de EDL.

Um ponto importante nessa pesquisa foi a socialização por meio de registros no quadro ou os diálogos promovidos entre os licenciandos ou entre os licenciandos e o pesquisador e/ou o professor regente. Em especial, os registros produzidos no primeiro dia de intervenção foram fundamentais para a identificação do conhecimento prévio dos licenciandos, bem como o modo de condução dos demais dias da pesquisa.

Foram identificados nos participantes conhecimentos prévios para o desenvolvimento do trabalho do conteúdo de EDL, seja nas respostas obtidas por meio do teste inicial, ou da realização das atividades em grupos. Embora esse artigo tenha tratado do primeiro encontro da produção de dados, os demais também contribuíram para que o licenciando pudesse articular o conhecimento científico e o escolar, pois contribuirá para a construção do saber pedagógico do conteúdo, primordial para a atuação docente. Um dos momentos

em que essa articulação ocorreu foi quando o grupo ao propor seu próprio problema, para aplicação numa sala de aula fictícia, no terceiro encontro, já foi capaz de mobilizar saberes da docência. Logicamente a (re) construção dos saberes sobre o conteúdo de equação diofantina linear, não serão alcançados somente com a duração de cinco encontros. Espera-se, no entanto, ter sido possível apresentar as possibilidades do trabalho com esse conteúdo.

Acreditamos que com esse trabalho saberes sobre o conteúdo de equações diofantinas lineares, tenham sido construídos e reconstruídos, o que, sem dúvida, contribuirá para que esses futuros professores sejam capazes de articular o conhecimento científico e o escolar em sua atuação docente, e que o façam de modo a transformar, para melhor, a realidade escolar.

6. Referências

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. **Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation.** For the Learning of Mathematics, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

_____. **Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge.** Educational Studies in Mathematics, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

_____. **The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics**. New Yor: Routledge, 2014.

GATTI, B. **Formação de professores no Brasil: características e problemas**. Educação & Sociedade, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação**: **abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (orgs). **A formação do professor que ensina Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 7 – 26.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

RANGEL, L.; MACULAN FILHO, N.; GIRALDO V. **CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO: UM ESTUDO COLABORATIVO SOBRE**

NÚMEROS RACIONAIS. In: – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 8(2), p. 42-70, junho, 2015. ISSN 2176-5634. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/283/2918>. Acesso em: 04/05/2017.

RESENDE, M. R. (2007) **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC/SP.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. São Paulo: EDUSP, 2003. 240p.

MIZUKAMI, M. G. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman**. Revista Educação, Santa Maria, v. 29, n. 2, p. 1-11, 2004. Disponível em: <http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm>. Acesso em: 15/11/2017.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: knowledge growth in teaching.** Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching: foundations of the new reform**. Harvard Educational Review, v. 57, n. 1, p. 1-27, 1987.

ZERHURSEN, A.; RAKES, C.; MEECE, S. **Diophantine Equations**. Disponível em <http://math.as.uky.edu>/~carl/ma330/projects/diophanfin.html>. Acesso em: 19/02/2017.

A TORRE DE HANÓI

Guilherme Nascimento de Oliveira, Raquel Perim Pereira, Gabriel Gandra Prata Gonçalves, Michel Guerra de Souza

guilhermeoliveira5001@gmail.com

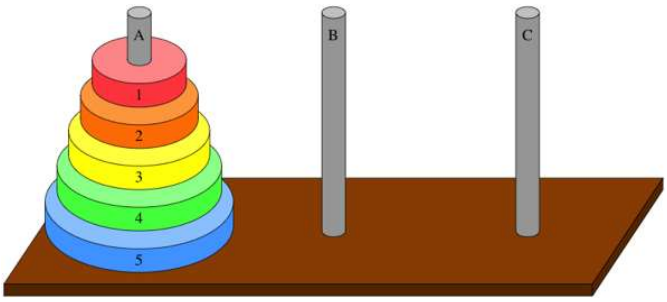
Resumo: A Torre de Hanói é um quebra-cabeça formado por um três pinos e um conjunto de discos, em que o objetivo é passar todos os discos de um pino para outro seguindo apenas duas restrições: apenas um disco pode ser movido de cada vez e discos maiores jamais devem estar sobre menores. Nesse artigo iremos explorar as consequências matemáticas, que abrangem diversos campos de estudo, decorrentes do funcionamento desse jogo, bem como descrever e explicar soluções genéricas para torres com *n* discos. Por fim, iremos também relatar, com resultados qualitativos, nossa experiência ao apresentar os resultados de nossa pesquisa na feira de alunos e professores da 7ª Semana da Matemática do IFES – *Campus* Vitória.

Palavras Chaves: Torre de Hanói; Sierpinski; Números binários; Fractais; Indução.

1. Introdução

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça constituído por três pinos verticais idênticos situados em uma base dispostos em forma de linha ou em forma de triângulo e um número finito de discos de diferentes raios externos que encaixam com pouca folga em cada um dos pinos. Inicialmente, os discos devem estar dispostos em ordem decrescente, de cima para baixo, no pino da extremidade esquerda (Figura 1). O objetivo do jogo é transferir todos os discos para um outro pino, que pode ser predeterminado ou não. No entanto,

Figura 1.

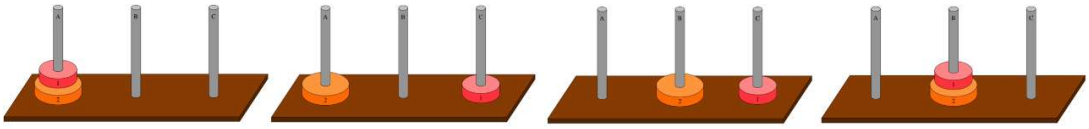


Fonte: Khan Academy

duas regras simples devem ser respeitadas: apenas um disco pode ser movimentado por

vez, o que implica a impossibilidade de mover um disco que esteja abaixo de outro, e um disco jamais poderá repousar sobre outro menor que ele. Uma solução para um problema de 2 discos com destino na torre do meio será mostrada a seguir (Figura 2).

Figura 2.



Fonte: Khan Academy

A ideia para a criação da Torre surgiu ao final do século XIV, tendo partido do matemático francês Édouard Lucas. O estudioso foi inspirado pela história de um templo indiano em Kashi Vishwanath que, lendariamente, conteria três postes, dos quais um estaria cercado por 64 discos de ouro. Os monges do local teriam então recebido instruções do deus hindu Brahma para mover os discos, conforme as regras já descritas, de um poste para outro, sendo o resultado da conclusão de sua tarefa a destruição do mundo. Há várias variações para esse mito - incluindo uma que coloca o templo na cidade vietnamita de Hanói, que define o nome de sua versão moderna - mas em todas elas as diretrizes permanecem as mesmas e, suas consequências, conforme mostrado adiante, permitem a elaboração e análise de conjecturas matemáticas relativas a diversos campos de estudo.

2. Solução da Torre de Hanói

Geralmente, esse desafio é utilizado de forma prática para desenvolver o raciocínio, a lógica e o trabalho em equipe de crianças e pré-adolescentes. É comum que lhes seja instruído para começar tentando com um número bem pequeno de discos (2, 3 ou 4), já que o número mínimo de movimentos necessários para completar uma Torre cresce em uma taxa exponencial, fazendo com que em jogos mais avançados haja a necessidade da elaboração de uma estratégia bem sólida para evitar que o jogador realize movimentos indevidos e arruíne ou atrase sua tentativa. Também não é recomendado que o número de discos extrapole 6, pois com 7 discos o número mínimo de movimentos atinge a casa das centenas. Como a solução tem caráter recursivo, ou seja, os desafios maiores podem ser subdivididos em vários desafios menores, caso o jogador consiga resolver metodicamente uma Torre de Hanói com 6 discos, ele certamente conseguirá resolver uma com 7 discos. Porém, tentar realizar tal feito será longo e fastidioso.

Por suas regras simples e genéricas, a Torre de Hanói se torna um ótimo objeto de estudo para a Matemática. A começar por sua solução: é possível demonstrar o número mínimo de movimentos necessários através do Princípio da Indução Finita. Suponha que seja conhecido o meio mais eficiente de passar n discos do primeiro para o último pino. Caso haja $n + 1$ discos, o maior disco poderá ser movido para o último pino somente se os n discos acima dele estiverem todos no pino intermediário. Isso poderá ser feito com a estratégia já conhecida de transferir os n discos. Logo em seguida, o disco maior deverá ser movido para o último pino e os n discos deverão ser colocados acima dele. Dessa forma, o número mínimo de movimentos será o dobro do número de movimentos no caso de $n + 1$ discos. Em linguagem matemática, considerando $f(n)$ o número mínimo de movimentos para resolver um jogo com n discos, tem-se:

$$f(n + 1) = 2 \times f(n) + 1$$

E é exatamente por isso que a solução do problema é considerada recursiva.

Neste momento, é perceptível o caráter exponencial da função, já que o próximo elemento da sequência depende do anterior multiplicado por algum fator.

Por meio da indução, é possível demonstrar que a função $f(n) = 2^n - 1$ satisfaz essa condição. De fato, assumindo que a ela é válida para $f(n)$.

$$f(n) = 2^n - 1$$

$$f(n + 1) = 2^{n+1} - 1$$

$$f(n + 1) = 2 \times 2^n - 2 + 1$$

$$f(n + 1) = 2 \times (2^n - 1) + 1$$

$$f(n + 1) = 2 \times f(n) + 1$$

Ela também será válida para $f(n + 1)$. Além disso, há o caso trivial $f(1) = 1$, que satisfaz a função e, consequentemente, conclui a demonstração.

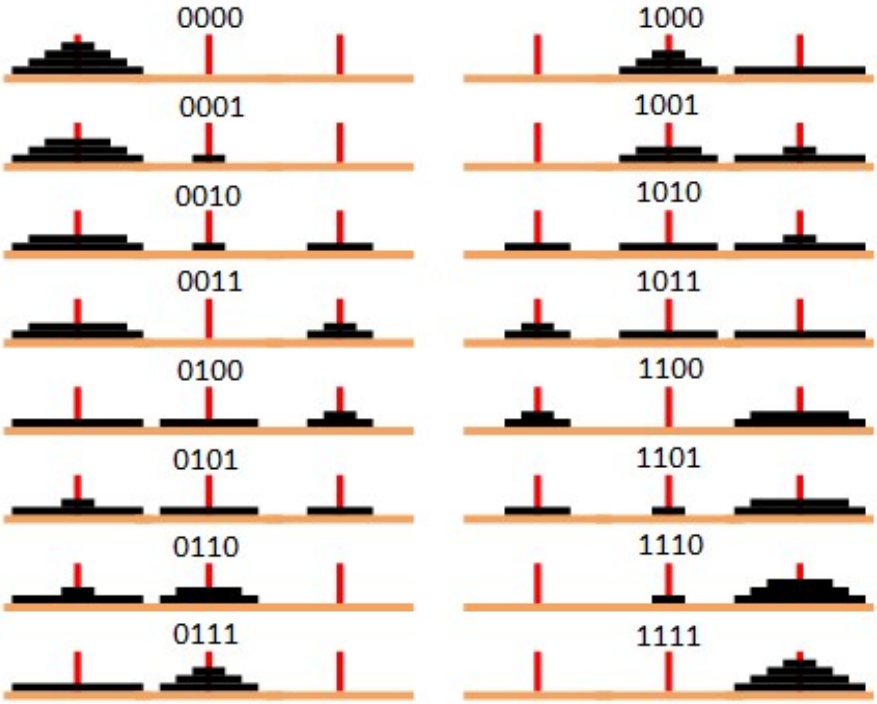
A título de curiosidade, é interessante notar que, segundo essa fórmula, se os religiosos da lenda que inspirou o desafio fossem capazes de mover um disco (de um total de 64) por segundo, ainda levariam quase 600 bilhões de anos para terminá-lo, o que equivale a mais de 40 vezes a idade atual do universo.

3. Torre de Hanói, Sistema Binário e Triângulo de Sierpinski

Ao resolver uma Torre de Hanói, é importantíssimo analisar com cuidado o que deve ser feito logo no primeiro movimento. Com base no raciocínio anterior, em uma tentativa com n discos, os $n-1$ discos deverão inicialmente ser transferidos para o pino intermediário. Para que isso seja possível, antes os $n-2$ discos deverão ser transferidos para o pino final. Para isso, antes os $n-3$ discos deverão ser transferidos para o pino intermediário. E assim por diante, até chegar no movimento de um único disco, que é o objetivo final desta análise. Como essa é uma sequência que se repete de 2 em 2 termos, podemos fazer uma análise em função da paridade de n. O primeiro disco deverá ser movido para o pino intermediário caso $n-(2k+1)=1$, ou seja, caso n seja par. Da mesma forma, o primeiro disco deverá ser movido para o pino final caso $n-(2k)=1$, ou seja, caso n seja ímpar.

Uma segunda análise pode ser feita, em cima da recursividade. Esse artifício é utilizado em diversas situações do dia a dia. A mais frequente delas é no princípio mais básico da Matemática: a contagem. A base mais utilizada atualmente é a base 10. Partindo do 0, a contagem unitária crescente consiste em passar por todos os 10 primeiros algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) e, em seguida, adicionar uma unidade à ordem imediatamente superior e recomeçar a contagem. Esse algoritmo repetitivo é justamente o que caracteriza a recursividade. A base 10 não é útil na análise da Torre de Hanói. Porém, a base 2 utiliza exatamente os mesmos princípios descritos no processo da descoberta da função geral para o mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói. Considere o estado inicial para $n=5$ como 00000 e o estado final como 11111, com o algarismo mais significativo representando o maior disco e o menos significativo representando o menor. Também, considere que um disco é movido sempre que o algarismo correspondente a ele passe de 0 para 1. Caso seja conhecido o método de transitar de 00000 para 01111 (correspondente a mover $n=4$ discos), basta adicionar 1 (mover o disco maior), obtendo 10000, e refazer o processo, finalizando com 11111. Por isso, podemos estabelecer uma bijeção entre o processo de contagem em binário e a resolução da Torre de Hanói. Tanto que a fórmula geral encontrada corresponde ao conjunto dos Números de Mersenne, que por sua vez representam o equivalente em base decimal do maior número binário com n dígitos (ou seja, 1111....11 n vezes). A seguir, encontra-se um exemplo de contagem para $n=4$ (Figura 3).

Figura 3.

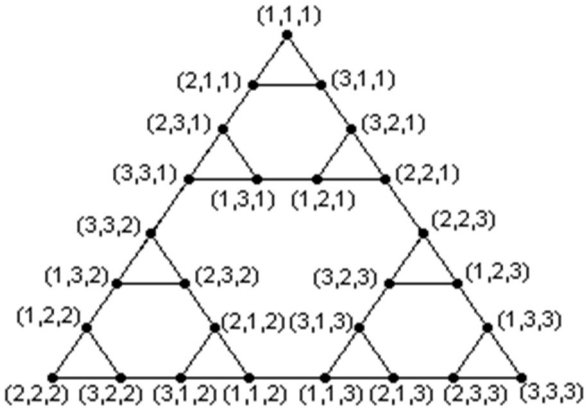


Fonte: Wolfram MathWorld (adaptado)

Além disso, como visto anteriormente, há uma alternância entre o movimento que deve ser feito para os discos de números pares e ímpares. Dessa forma, um algoritmo bem simples para resolver a Torre de Hanói é simplesmente contar em binário: cada vez que um dígito correspondente a um n ímpar (ou seja, um expoente par de 2 na base binária) passar de 0 para 1, o disco correspondente deve ser movido para a esquerda, e cada vez que um dígito correspondente a um n par passar de 0 para 1, o disco correspondente deve ser movido para a direita. Caso o disco se mova de um extremo para fora do jogo, ele deve voltar pelo outro extremo, como se o jogo fosse cíclico.

Uma última análise pode ser feita, desta vez utilizando grafos. Representando graficamente para $n = 3$ cada uma das configurações como se fosse um ponto em um plano e ligando os pontos que correspondem a configurações separadas por um único movimento, obtemos um padrão bem interessante (Figura 4). O primeiro algarismo representa a posição do menor disco e o último representa a posição do maior.

Figura 4.



Fonte: Cut the Knot

Na figura, pode-se observar que cada ponto dos triângulos menores representa uma configuração para o menor disco, cada triângulo pequeno dentro do triângulo médio representa uma posição para o disco intermediário e cada triângulo médio representa uma posição para o disco maior dentro do triângulo maior. Também é possível notar que a solução mais simples para a Torre de Hanói é uma linha reta entre o topo e a extremidade direita do triângulo, que corresponde a 7 movimentos. Os vértices do triângulo maior representam as três configurações nas quais que todos discos estão em um único pino.

A figura formada também lembra o processo de iteração para a formação do Triângulo de Sierpinski (Figura 5). Neste último, as únicas linhas representadas são as permutações do disco menor.

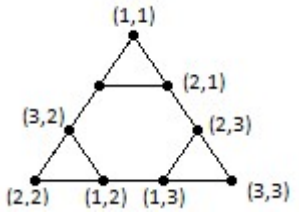
Figura 5.

Fonte: Wikimedia Commons

Essa semelhança também pode ser comprovada pela indução. Ao tentar montar um triângulo para $n + 1$ discos a partir de um triângulo para n discos, podemos observar que os únicos pontos que permitem a movimentação do disco $n + 1$ são dois dos três extremos do triângulo de n discos, nos quais todos os discos estão no mesmo pino. Assim, para facilitar a demonstração, podemos representar o triângulo de n discos apenas por seus

extremos. Na imagem (Figura 6), o primeiro número representa a posição os n menores discos e o segundo número representa a posição do menor disco. A seguir, basta ignorar o dígito da direita e adaptar os três triângulos pequenos para que tomem o formato do triângulo de n discos.

Figura 6.



Fonte: Cut the Knot (Adaptado)

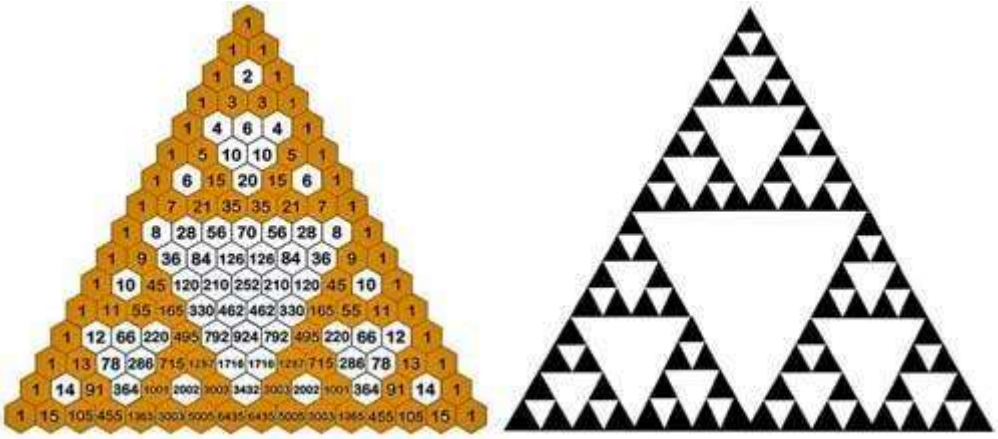
Assim, a cada passo é formado um novo triângulo que contém três vezes o triângulo anterior, que é exatamente o processo de formação do fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

É possível demonstrar que a Torre de Hanói está relacionada com o Triângulo de Pascal. A figura obtida ao ligar os pontos adjacentes correspondentes a números ímpares das 2^n primeiras linhas do Triângulo de Pascal é idêntica à obtida pela distribuição das possibilidades de uma Torre de Hanói de n discos, como feito na Figura 4.

Uma demonstração simples para isso é feita novamente por indução (Figura 7). Partindo de um Triângulo de Pascal com 2^n linhas e admitindo a premissa feita como verdadeira, é óbvio que todos os elementos da linha 2^n serão ímpares. Assim, pelas propriedades do Triângulo de Pascal, apenas o primeiro e o último elementos da linha $2^n + 1$ serão ímpares. Cada um desses dois pontos começará uma nova árvore de distribuição de elementos ímpares, assim como começou na primeira linha. Nesse momento, os dois pontos estão horizontalmente distantes de $(2^n + 1) - 2 = 2^n - 1$ pontos. A cada linha, a distância entre os dois elementos mais próximos dessas árvores decresce de uma unidade. Portanto, na linha 2^{n+1} (2^n linhas contando a partir da linha $2^n + 1$), teremos uma distância de 0, o que indica que os pontos são pela primeira vez adjacentes, mas não ainda sobrepostos. Dessa forma, uma árvore se desenvolveu de forma totalmente independente da outra. Por isso, temos que o triângulo formado pelos elementos ímpares das 2^{n+1} primeiras linhas do Triângulo de Pascal é constituído por 3 triângulos feitos da mesma maneira com as 2^n ligados pelos extremos. Essa é exatamente a figura formada

no processo da distribuição das possibilidades de uma Torre de Hanói de n discos em um plano. Da mesma maneira, essa figura formada a partir do Triângulo de Pascal tem grande semelhança com o Triângulo de Sierpinski, como pode ser observado na figura.

Figura 7.



Fonte: Wikimedia Commons

4. Apresentação na Semana de Matemática

A apresentação do trabalho explicitado neste artigo foi realizada no dia 18 de maio durante a Semana de Matemática no Ifes - Campus Vitória, que por sua vez se estendeu pelo período de 16 e 19 de maio de 2018. A apresentação teve duração de cinco horas ininterruptas e contou com a participação de diversos alunos e professores do Ifes e da rede estadual de ensino. Foi feito o uso de uma miniatura da Torre de Hanói com seis discos e um cartaz onde pôde-se mostrar um esquema de um triângulo de Sierpinski de 3 recursividades. A partir desses elementos, foram mostrados aos visitantes da feira os conceitos de fractal, triângulo de Sierpinski e sistema binário de contagem, bem como foi exposta a história por trás da Torre de Hanói.

Quanto ao conhecimento matemático desses assuntos, foi possível explicitá-lo através dos elementos visuais disponíveis na barraca e do que havia sido adquirido pelos alunos que organizaram a apresentação. Foram feitos questionamentos aos visitantes sobre a relação entre essas áreas da Matemática e o que pode ser observado delas no cotidiano, o que demandou a discussão de alguns conceitos que ainda não estavam claros para alguns participantes, como as ideias por trás de sistemas de contagem, especialmente o binário, e o conceito de recursividade em fractais.

Com a finalização da explicação promovida pelos alunos do Ifes, foi esperado que os visitantes da feira compreendessem melhor que, partindo de um fractal e utilizando-se do

sistema binário de contagem, é possível representar todos os caminhos para se resolver uma Torre de Hanói com n discos, inclusive o caminho mais rápido e eficiente para tal.

5. Conclusão

Com o trabalho e a pesquisa realizados, e sua subsequente apresentação na Semana de Matemática, diversos alunos e professores presentes puderam ser apresentados aos conceitos matemáticos básicos relacionados à Torre de Hanói, bem como entender e aplicar os mecanismos que permitem uma solução universal do problema trazido por ela. Pode-se verificar que todos aqueles que ouviram a apresentação, além de adquirirem conhecimentos tanto lógicos quanto históricos, também foram capazes de utilizá-los para resolver Torres de quatro, cinco e até seis discos – número máximo disponível no dia – da maneira mais eficiente possível, isto é, com o mínimo número de movimentos. Também se percebeu o entendimento, ainda que simples, do princípio básico da contagem nas diversas bases e, especialmente, na base binária. Notou-se, contudo, uma dificuldade na compreensão da parte relacionada ao Triângulo de Sierpinski e sua relação com o problema, possivelmente associado à complexidade de temas como fractais e Teoria dos Grafos e ao tempo reduzido de contato com eles. Ainda assim, a maioria conseguiu assimilar a natureza de crescimento do Triângulo de Sierpinski e, portanto, do número de configurações possíveis para a Torre de Hanói com o aumento do número de discos. Uma possível forma de solucionar esse empecilho, sendo impossível o aumento do tempo de apresentação, seria simplificar mais essa parte, utilizando um Triângulo de Sierpinski menor ou ainda empregando mais materiais para tornar o processo mais didático.

De maneira geral, o trabalho como um todo foi proveitoso tanto para os seus realizadores quanto para os que vieram a ter contato com ele durante a feira, representando uma experiência pedagógica significativamente educativa para os alunos e professores presentes.

6. Bibliografia

BOGOMOLNY, Alexander. **Sierpinski Gasket and Tower of Hanoi.** Disponível em: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Hanoi.shtml>. Acesso em 10 de junho de 2018.

JONES, Keith. **Connections in Mathematics: The Tower of Hanoi and the Sierpinski Gasket, entwined by Self Similar Groups and Finite State Automata.** Disponível em: <https://www.oneonta.edu/academics/research/PDFs/LOTM12-Jones.pdf>. Acesso em 20 de maio de 2018.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SPITZNAGEL, Edward L. **Selected topics in mathematics**. Washington: Washington University, 1971.

CÁLCULO, RELATIVIDADE E UMA DAS FÓRMULAS MAIS FAMOSAS DA FÍSICA

Douglas Araujo Victor, Caio Angelo da Silva, Cesar Turczyn Campos

douglas.araujo@ifes.edu.br

Resumo: Até o início do século XX ideias de grandes físicos como Sir Isaac Newton, que fundamentaram a mecânica clássica, vigoravam de maneira predominante; as teorias existentes forneciam um embasamento teórico e matemático suficiente para explicar os fenômenos visualizados e estudados até então. Tal era a certeza em tais teorias que o conhecido físico Lorde Kelvin supostamente chegou a dizer em 1900 que: "Não há nada de novo para ser descoberto na física, tudo o que resta são medições mais e mais precisas". Porém, a partir do século XX, com o início da física moderna, questionamentos começaram a ser feitos acerca das ideias e teorias vigentes até então. Descobertas foram sendo feitas e no meio desse fervor científico surgem as famosas teorias de Einstein. Um de seus importantes legados científicos, a Teoria da Relatividade, trouxe uma nova interpretação acerca do universo, estabelecendo relações tanto teóricas quanto matemáticas, como dilatação temporal, contração espacial e defeito de massa que implicaram na mudança de assuntos bem conhecidos e estudados como energia cinética, energia mecânica, momento linear, dentre outros. Desses últimos estudos surge o conceito de energia de repouso de um corpo, ideia essa que é representada matematicamente pela famosa fórmula de Einstein: $E=mc^2$. O presente trabalho trata da interpretação física e matemática de tais teorias que vieram com a relatividade e, principalmente, dessa mundialmente famosa equação. Além disso, será discutida a transição da física clássica newtoniana para a física moderna de Einstein; tal transição representou uma mudança teórica na interpretação do universo e nas ideias matemáticas aplicadas a conceitos já existentes como energia e momento. A dedução da fórmula $E=mc^2$ utiliza diversos conceitos de cálculo diferencial e integral que serão abordados juntamente com a sua interpretação física. Será abordado o desenvolvimento matemático desses conceitos relativísticos a partir da física Newtoniana. Dessa forma, será mostrado como chegar a conclusões tão famosas como a energia de repouso e sua fórmula a partir de conceitos conhecidos da física clássica, como energia cinética e momento linear, utilizando as ferramentas matemáticas citadas. Tal abordagem, além de mostrar de onde vem a fórmula $E=mc^2$ e sua interpretação e aplicações no mundo real, mostra como a matemática pode ser utilizada para interpretar e desenvolver ideias na Física.

Palavras Chaves: Relatividade Restrita. Cálculo Diferencial e Integral. Energia de Repouso.

1. Introdução

Por mais que a Teoria da Relatividade seja famosa graças a físicos como Einstein e Lorentz, não foi com esses cientistas que essa teoria teve início. As ideias sobre relatividade de uma certa maneira, mesmo que de forma muito mais simples, começaram

a ser pensadas muito tempo antes de Einstein. Galileu Galilei, físico, matemático, astrônomo e filosofo do século XVI, já havia começado a pensar em ideias relativísticas muito antes, porém, suas ideias não estavam completas, e somente com os postulados de Einstein algumas ideias e transformações matemáticas introduzidas por Galileu foram reformuladas e então começaram a compor a mundialmente famosa Teoria da Relatividade que conhecemos hoje. Essas ideias iniciais, denominadas de Relatividade de Galileu, são ideias muito importantes e nos ajudam a entender a Relatividade e o que ela estuda, uma vez que as ideias da Relatividade de Galileu são expressas por uma matemática muito simples servindo de ponto de partida para construímos a Relatividade atual, mais complexa.

2. A Relatividade de Galileu

Um exemplo interessante que nos permite entender o que era a Relatividade de Galileu e qual eram as ideias estudadas nessa teoria é o exemplo de um trem. Vamos supor que exista um homem em uma estrada, parado em relação ao solo, que esteja observando um trem que se move para a direita com velocidade de $100\ km/h$. Vamos chamar este homem de observador. Agora, vamos supor que dentro desse trem exista um homem, que se move com velocidade de $5\ km/h$ em relação ao trem, na mesma direção que esse, vamos chamar esse homem de andarilho. Uma das perguntas que podemos fazer é "Qual é a velocidade que o observador enxerga o andarilho?" Uma vez que o andarilho se move em relação ao trem, e o trem se move em relação ao observador, temos que a velocidade que o observador observa o andarilho é de $100\ km/h + 5km/h = 105km/h$ e podemos chegar as fórmulas abaixo:

$$v = v' + u$$

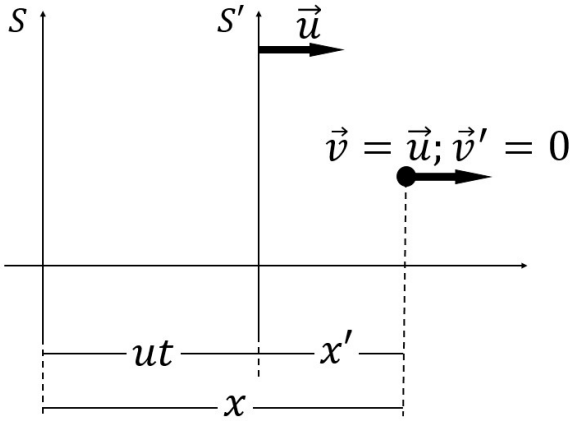
$$v' = v - u$$

Onde v é a velocidade do andarilho em relação ao observador, v' é a velocidade do andarilho em relação ao trem e u é a velocidade do trem em relação ao observador. Ou seja, temos dois referenciais, o referencial S, fixo, que é o observador, o referencial S', móvel em relação à S, que é o trem, e temos um evento que pode ser observado tanto por S como por S', que é o andarilho. Assim, v seria a velocidade do evento medido por S, v' seria a velocidade do evento medido por S', e u seria a velocidade de um referencial em

relação ao outro. Ou seja, o que estamos calculando é a transformação da velocidade quando mudamos de um referencial para o outro. Da mesma forma que fazemos essa transformação de velocidade, poderíamos fazer a transformação do deslocamento de um referencial para o outro. Usando esse exemplo do trem, podemos imaginar que dentro do trem o andarilho se deslocaria x' metros, porém, como o trem possui velocidade em relação ao observador, esse iria observar o andarilho se deslocando $x \neq x'$ metros.

Para visualizar melhor essa transformação da posição e começar a entender a teoria matematicamente, vamos introduzir os referenciais abaixo:

Figura 1: Referenciais S e S´.



Fonte: Os autores.

A situação é exatamente o exemplo do trem usado anteriormente, porém a única diferença é que o andarilho, representado pela bolinha, está parado em relação ao trem, de forma que o observador o observe com a mesma velocidade u do trem. E também é importante mencionar que nessa formulação, no início, em $t = 0$ segundos, a origem dos referenciais estavam no mesmo ponto do espaço.

Temos que x é a distância medida por S, x' é a distância medida por S', e ut (velocidade do trem vezes o tempo que se passou) é a distância que separa um referencial do outro, ou, o trem do observador.

Podemos ver que:

$$x = x' + ut$$

$$x' = x - ut$$

Temos que a partícula não se move nem na direção y, nem na direção z, portanto também temos que:

$$y = y'$$

$$z = z'$$

E, além disso, uma coisa que foi pensada por Galileu, e que é algo óbvio para a maioria das pessoas, é que o tempo seria medido de forma igual tanto fora quanto dentro do trem, se o observador e o andarilho estivessem com relógios idênticos e sincronizados em $t = 0$, o tempo seria medido igualmente em ambos os relógios, ou seja, temos que:

$$t = t'$$

Portanto, temos que as transformações de um referencial para o outro são dadas pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

No caso as transformações da esquerda seriam usar as informações de S para chegar às informações de S', e as transformações da direita seriam o inverso, usar as informações de S' para chegar às informações de S. De qualquer forma em ambos os casos estamos transformando as informações de um referencial para o outro e é isso que a Relatividade de Galileu estuda.

Até então tudo parecia certo, porém, no final do século XIX, com as descobertas de grandes físicos como Einstein e Lorentz, chegou-se a conclusão de que o tempo não é medido da mesma forma em diferentes referenciais e também que referenciais diferentes enxergam um mesmo objeto com comprimentos diferentes. Ou seja, se um irmão e uma irmã possuírem dois relógios inicialmente sincronizados e o irmão embarcar em uma viagem de avião, enquanto a aeronave está voando o tempo será medido diferente para o irmão no avião e para a irmã que está sentada no aeroporto, e quando o irmão retornar para sua irmã, os relógios não estarão mais sincronizados, uma vez que o tempo passou diferente para os dois. De mesmo modo, o irmão veria um objeto em sua mão com determinado tamanho, se a irmã conseguisse olhar para esse objeto do aeroporto, ela veria

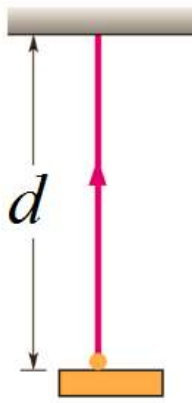
esse objeto com tamanho diferente. Foram descobertos os efeitos de dilatação temporal e contração espacial, e essas duas ideias mudaram completamente as Transformações de Galileu que vimos acima, dando origem às Transformações de Lorentz, que são a mesma ideia das Transformações de Galileu, porém com os efeitos de dilatação temporal e contração espacial incorporados à essas transformações. Esses efeitos e as Transformações de Lorentz serviram de base para as teorias da Relatividade Restrita de Einstein.

3. Dilatação Temporal e Contração Espacial

Uma das formas de visualizar os efeitos da dilatação temporal e contração espacial é por meio de um experimento mental. Vamos supor a existência de dois referenciais, um fixo em uma estrada e um fixo em um trem, o qual se move em relação ao referencial da estrada com velocidade u.

Vamos supor que dentro do trem em movimento exista um emissor de luz que aponta para o teto do trem, e no teto do trem exista um espelho. Uma pessoa que está dentro do trem veria o feixe de luz descrever um caminho como na figura abaixo:

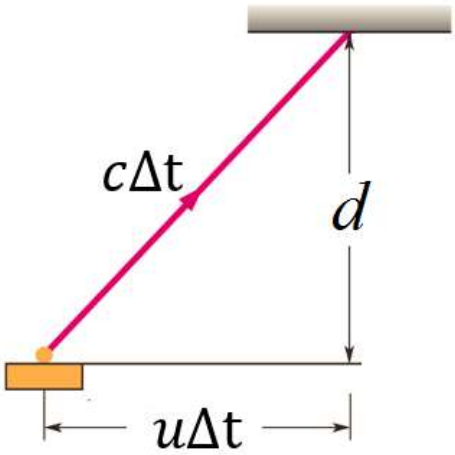
Figura 2: Feixe visualizado dentro do trem



Fonte: Halliday (2009) - Editado

No caso, temos que d é a distância do anteparo ao espelho. Já o observador que está na estrada, observando o trem em movimento, veria o feixe de luz descrever um caminho inclinado, como na figura abaixo:

Figura 3: Feixe visualizado fora do trem



Fonte: Halliday (2009) - Editado

No caso, temos que $c\Delta t$ é a distância que a luz percorreu (onde c é a velocidade da luz, que vale $299792458\, m/s$) e $u\Delta t$ é a distância que o anteparo e o espelho (e o trem) percorreram.

Temos então duas situações, o evento visto pelo referencial fixo, e o mesmo evento visto pelo referencial que se move com o evento, com o experimento, dentro do trem. Portanto, afirmando que existe diferença na passagem do tempo, vamos adotar que o tempo passado para o referencial que se move com o trem é dado por $\Delta t'$, enquanto que o tempo passado para o referencial fixo na estrada é Δt. Com essas informações podemos fazer o seguinte:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow c = \frac{d}{\Delta t'} \rightarrow \Delta t' = \frac{d}{c}$$

Temos essa relação para o referencial dentro do trem. Para o referencial fora do trem podemos usar o triângulo da figura 3, utilizar o Teorema de Pitágoras, e isolar o Δt para saber quanto tempo se passa fora do trem;

$$d^2 + (u\Delta t)^2 = (c\Delta t)^2$$

$$(c\Delta t)^2 - (u\Delta t)^2 = d^2$$

$$(c^2 - u^2)\Delta t^2 = d^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{d^2}{(c^2 - u^2)}$$

$$\Delta t = \frac{d}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

$$\Delta t = \frac{d}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Porém,

$$\Delta t' = \frac{d}{c}$$

Logo temos que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Fazendo as seguintes definições temos:

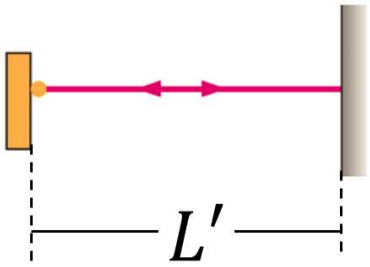
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{u}{c} \quad \text{e} \quad \Delta t = \gamma \Delta t'$$

O γ é chamado de fator de Lorentz, e ele aparece muitas vezes na Relatividade Restrita, sendo um fator muito importante, o β é a razão entre a velocidade do corpo e a velocidade da luz, e $\Delta t = \gamma \Delta t'$ é a formula que representa como o tempo passa em diferentes referenciais, dependendo da velocidade relativa u. Portanto $\Delta t = \gamma \Delta t'$ é a fórmula que representa a dilatação temporal entre referenciais. Por exemplo, se um avião se move a $0{,}866c$ (86,6% da velocidade da luz), temos que $\Delta t \cong 2\Delta t'$, ou seja, se dentro do avião se passou 1 hora, fora do avião se passaram 2 horas. A fórmula acima nos permite calcular a diferença na passagem do tempo para referenciais com qualquer velocidade relativa entre si.

Portanto, deduzimos a fórmula da dilatação temporal. Se pegarmos esse mesmo experimento e vira-lo 90º dentro do trem, de forma que o feixe de luz aponte na mesma direção a qual o trem está se movimentando, é possível determinar uma fórmula para a contração espacial.

Dentro do trem, o observador veria o feixe de luz saindo do emissor, sendo refletido no espelho e voltando novamente para o emissor, como na figura abaixo:

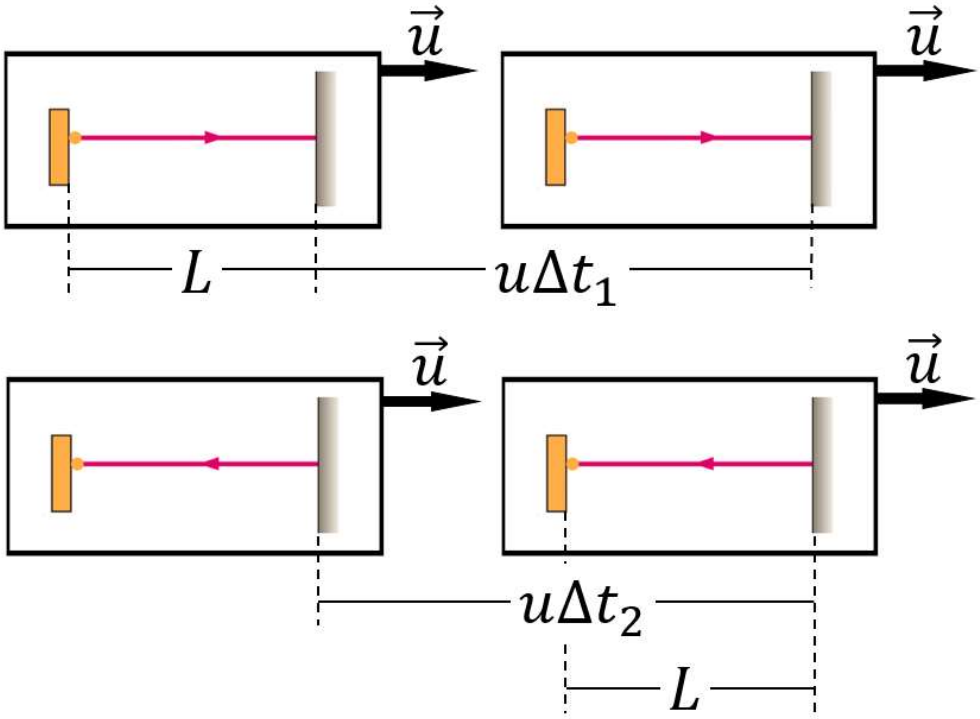
Figura 4: Feixe visualizado dentro do trem



Fonte: Halliday (2009) - Editado

No caso, L' é a distância que separa o emissor do espelho vista pelo observador dentro do trem. Já o observador que está fora do trem veria a luz percorrer uma distância maior na ida do emissor para o espelho, e menor na volta do espelho para o emissor, uma vez que o trem está se movendo para a direita. No caso, um observador do lado de fora do trem veria a luz se movimentando como na figura abaixo:

Figura 5: Feixe visualizado fora do trem



Fonte: Halliday (2009) - Editado

No caso, L é a distância que separa o emissor do espelho vista pelo observador fora do trem e $u\Delta t_1$ e $u\Delta t_2$ são as distâncias que o trem percorre pelo fato de ter velocidade em relação ao referencial fora do trem.

O que está acontecendo é que inicialmente a luz estava no emissor e então ela viajou para o espelho do outro lado, os dois aparatos de cima da figura 5 representam esse movimento da luz saindo do emissor e indo para o espelho enquanto o trem se movimenta para a direita. Após isso a luz é refletida pelo espelho e volta para o emissor, indo na direção contrária a que o trem está indo, e esse movimento da luz saindo do espelho e voltando para o emissor é representado pelos dois aparatos de baixo da figura 5.

Podemos fazer o seguinte, para o referencial dentro do trem, a luz percorreu duas vezes a distância L', uma vez que saiu do emissor para o espelho e depois de volta, portanto temos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow c = \frac{2L'}{\Delta t'} \rightarrow \Delta t' = \frac{2L'}{c}$$

Já para o observador que está do lado de fora do trem, temos que ele viu dois movimentos, um dado pelo Δt_1 e outro dado pelo Δt_2, temos que:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta s = v\Delta t$$

Olhando para a figura temos que:

$$L + \mathrm{u}\Delta t_1 = \mathrm{c}\Delta t_1$$

$$L - \mathrm{u}\Delta t_2 = c\Delta t_2$$

Temos que o tempo total Δt é igual à soma de Δt_1 e Δt_2, portanto, podemos isolar Δt_1 e Δt_2 das equações acima e soma-los para obter o tempo total.

$$L + u\Delta t_1 = c\Delta t_1 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-u}$$

$$L - u\Delta t_2 = c\Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+u}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = L\left(\frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u}\right) =$$

$$= L\left(\frac{c+u+c-u}{c^2-u^2}\right) = L\left[\frac{2c}{c^2(1-\beta^2)}\right] = \frac{2L}{c}\gamma^2$$

$$\therefore \Delta t = \frac{2L}{c}\gamma^2$$

Logo, uma vez que

$$\Delta t = \gamma\Delta t'$$

teremos que

$$\left(\frac{2L}{c}\gamma^2\right) = \gamma\left(\frac{2L'}{c}\right) \rightarrow L\gamma = L'$$

e então

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

Assim temos que $L = L'/\gamma$, onde γ é o fator de Lorentz. Essa fórmula representa matematicamente como se dá a contração espacial entre referenciais. Novamente, se a velocidade deste trem for de $0.866c$ (86,6% da velocidade da luz), temos que $L \cong L'/2$, ou seja, um objeto de 10 metros dentro do trem seria visto com 5 metros por um observador que está fora do trem. Se um carro estivesse com essa velocidade em relação a estrada, um observador fixo na estrada o veria com metade de seu tamanho normal e o seu tempo passaria duas vezes mais rápido do que o tempo do motorista.

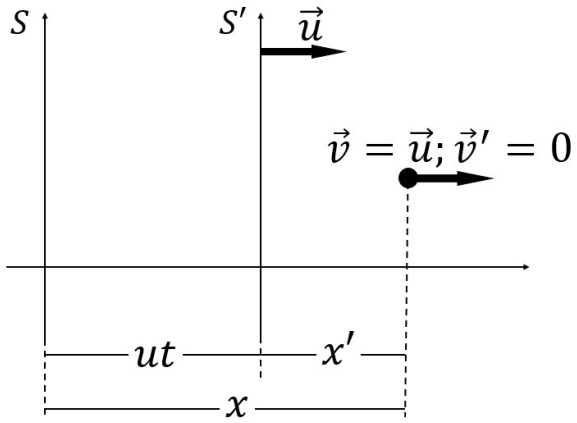
Portanto, agora temos um novo entendimento de como o espaço-tempo se comporta quando observamos eventos através de diferentes referenciais e quando alteramos a velocidade relativa desses referenciais. Dependendo da velocidade relativa os efeitos de dilatação temporal e contração espacial serão muito ou pouco significativos, e a magnitude desses efeitos é dada pelo fator de Lorentz.

Dessa forma, considerando esses efeitos nas transformações entre referenciais, podemos modificar as transformações de Galileu e introduzir as Transformações de Lorentz.

4. Transformações de Lorentz

Vamos considerar o referencial abaixo:

Figura 6: Referenciais S e S´.



Fonte: Halliday (2009) - Editado

Para esse referencial, como vimos, temos as seguintes Transformações de Galileu:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Porém, sabemos que os efeitos relativísticos espaço-temporais existem, portanto temos que a primeira e quarta equações não estão completas (a segunda e terceira equações não serão modificadas, pois a contração espacial só ocorre na direção da velocidade relativa do corpo, como este referencial não se move nem em y nem em z, essas equações permanecem inalteradas).

Sabemos que x' é constante, uma vez que o evento está parado em relação ao trem e que x' é a distância observada pelo referencial S'. Portanto temos que essa distância x' é equivalente L' de $L = L'/\gamma$, uma vez que L' também é constante e que L' também é a distância observada pelo referencial que está em movimento. Logo, temos que L é a distância observada pelo referencial S, ou seja, $L = x - ut$, portanto, temos que

$$L' = \gamma L \rightarrow x' = \gamma(x - ut)$$

Por questões de simetria, vamos multiplicar e dividir ut acima por c, dai teremos:

$$x' = \gamma\left(x - \frac{uct}{c}\right) \rightarrow x' = \gamma(x - \beta ct)$$

Logo temos que as equações para as transformações são:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = ? \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = ? \end{cases}$$

Porém não sabemos como fica a quarta equação, sabemos que $t' \neq t$, e sabemos como se da a variação do tempo, mas não sabemos como ele se transforma de um referencial para o outro. Para descobrir isso basta substituir $x' = \gamma(x - \beta ct)$ na expressão $x = \gamma(x' + \beta ct')$ e isolar o ct'. Com isso encontraremos

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad ou \quad t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

Dessa forma, temos que a transformação de um referencial para o outro, considerando os efeitos da contração espacial e dilatação temporal, é dada pelas quatro equações abaixo

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

Essas transformações acima são chamadas de Transformações de Lorentz. Qualquer movimento que observamos será um movimento em quatro dimensões. Vamos supor um trem em uma estrada, esse trem pode se mover ao longo dos eixos x, y ou z, mas o trem também se move no eixo temporal. Mesmo se o trem estivesse parado espacialmente, o tempo estaria passando pra ele, isso significa que parado espacialmente ou não, todo corpo se desloca no eixo temporal. Dessa forma temos que todo corpo realiza movimentos em quatro dimensões, e quando transformamos as informações desse movimento de um referencial para o outro, temos as quatro equações acima. As três primeiras equações são fisicamente espaciais e a quarta equação é fisicamente temporal, por questões de simetria dimensional, representamos a quarta equação como ct e não como t, pois ct é dado em $(m/s)s = m$, dessa forma ct tem características de uma dimensão espacial, uma vez que é medida em metros, e dessa forma temos uma simetria onde todas as quatro dimensões do movimento são matematicamente espaciais.

As Transformações de Lorentz acima e os efeitos de contração espacial e dilatação temporal trazem uma nova interpretação acerca do espaço e tempo. A física clássica foi toda construída analisando certos fenômenos que ocorrem no espaço e em um certo período de tempo. Uma vez que mudamos a interpretação sobre espaço e tempo, mudamos física e matematicamente diversas ideias da física clássica, como energia

cinética, momento, dentre outros. E com essas reformulações de algumas ideias da física clássica, surgem novas ideias e teorias tais como a energia de repouso representada pela famosa fórmula $E = mc^2$. Toda essa nova interpretação do espaço-tempo, a sua relação com a velocidade dos corpos e as Transformações de Lorentz serviram de base e foram objeto de estudo da Relatividade Restrita.

5. Relatividade Restrita

Muitos dos efeitos estudados na física clássica utilizam ideias como velocidade, aceleração, momento, dentre outras. Como mudamos nossa interpretação do espaço-tempo, essas ideias utilizadas na física clássica também terão uma nova formulação matemática, e novas interpretações. Logo, vamos partir das Transformações de Lorentz e ver como a velocidade e o momento se comportam com as novas definições de espaço-tempo.

Vimos que para descrever o espaço e o tempo entre diferentes referenciais utilizamos quatro equações. Para deduzir as equações de velocidade e momento, podemos compactar as Transformações de Lorentz em matrizes e vetores ao invés de lidar algebricamente com quatro equações separadamente.

Temos que as Transformações de Lorentz podem ser representadas pela notação matricial abaixo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Se fizermos a multiplicação das matrizes acima chegaremos exatamente nas quatro equações das Transformações de Lorentz.

Temos que cada uma dessas matrizes são tensores, que são representadas pelas letras e índices abaixo:

$$X'^{\mu} = \eta^{\mu}_{\nu} X^{\nu}$$

No caso, X'^{μ} representa as informações (de cada uma das quatro dimensões) do referencial S', X^{ν} representa as informações do referencial S, e η^{μ}_{ν} é uma matriz de transformação, que transforma as informações do referencial S resultando nas informações do referencial S'.

O benefício de se usar essa notação é que em apenas uma linha representamos as transformações de um referencial para o outro em todas as quatro dimensões.

Com essa notação tensorial muito mais compacta, podemos então rapidamente determinar como se comportam a velocidade e o momento. Sabemos que a velocidade é a taxa de variação do espaço em relação ao tempo. Portanto, se derivarmos ambos os lados da equação acima em relação ao tempo poderemos descobrir como se transforma a velocidade de um referencial para o outro. Sabemos que devemos derivar ambos os lados em relação à mesma coisa, porém, temos dois tempos diferentes, um tempo do referencial S, e outro tempo do referencial S'. Vamos derivar ambos os lados em relação ao tempo do referencial S', ou seja, t'

$$X'^{\mu} = \eta^{\mu}_{\nu} X^{\nu} \rightarrow \frac{\partial X'^{\mu}}{\partial t'} = \eta^{\mu}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial t'}$$

A matriz de transformação η^{μ}_{ν} é uma matriz constante, ela pode sair da derivada. Como sabemos, t' é o tempo do referencial S', dessa forma do lado esquerdo da equação temos as velocidades do referencial S'. Do lado direito da equação temos a derivada das informações de S em relação ao tempo de S', dessa forma devemos fazer a regra da cadeia abaixo

$\frac{\partial X'^{\mu}}{\partial t'} = \eta^{\mu}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$, uma vez que $dt = \gamma dt'$, teremos que

$$\frac{\partial X'^{\mu}}{\partial t'} = \eta^{\mu}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial t} \gamma$$

Portanto, como estamos derivando corretamente dos dois lados, teremos a transformação das velocidades abaixo

$$V'^{\mu} = \eta^{\mu}_{\nu} \gamma V^{\nu}$$

Multiplicando pela massa em ambos os lados chegamos em

$$mV'^{\mu} = \eta^{\mu}_{\nu} \gamma m V^{\nu}$$

E com isso podemos chegar a uma nova definição de momento, onde a transformação de um referencial para o outro é dada pela equação abaixo

$$p'^{\mu} = \eta^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$$

p^v é o momento que o referencial S observa, dessa forma, sempre quando observamos um objeto qualquer se movendo, temos que o seu momento é dado pela expressão

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Essa nova definição, resultada da nova interpretação do espaço-tempo, irá mudar outras definições como a de energia cinética.

Na física clássica a definição de momento matematicamente é $\vec{p} = m\vec{v}$ e a partir disso se define a ideia de energia cinética clássica. A definição de energia cinética é dada por

$$\tau = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K, \text{ sendo } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Onde τ é uma grandeza física chamada de trabalho, $\vec{F}$ é a força aplicada, $\vec{r}$ é o vetor posição e ΔK é a variação da energia cinética.

Se desenvolvermos a integral acima e usarmos a definição clássica de momento podemos achar a energia cinética clássica

$$K = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int d(mv) \frac{dx}{dt} = m \int v dv = \frac{1}{2} m v^2$$

Considerando um movimento em apenas uma direção espacial e considerando que a massa é constante, chegamos ao resultado clássico da energia cinética abaixo

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Porém, se mudarmos a definição clássica de momento para o momento relativístico $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, a integral acima muda e então poderemos chegar à energia cinética relativística fazendo as contas abaixo

$$K = \int \frac{dp}{dt} dx \rightarrow K = \int d(\gamma m v) \frac{dx}{dt}$$

$$d(\gamma m v) = m d\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + v\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2v}{c^2}\right)\right] dv =$$

$$= \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]dv = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]dv =$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{c^2-v^2}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]dv = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]dv$$

$$=$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\left(\frac{v^2}{c^2-v^2}\right)\right]dv = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c^2-v^2+v^2}{c^2-v^2}\right)dv =$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}\right)dv = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c^2-v^2}{c^2}\right)^{-1}dv =$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}dv = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}dv$$

Ou seja, $d(\gamma v) = \gamma^3 dv$, daí teremos

$$K = m\int d(\gamma v)\frac{dx}{dt} = m\int \gamma^3 v dv = m\int \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} v\, dv$$

Fazendo a substituição $w = 1-\frac{v^2}{c^2} \therefore\ dw = -\frac{2v}{c^2}dv \rightarrow\ dv = -\frac{c^2}{2v}dw$

$$K = m\int w^{-\frac{3}{2}}v\left(-\frac{c^2}{2v}\right)dw = -\frac{mc^2}{2}\int w^{-\frac{3}{2}}dw =$$

$$= -\frac{mc^2}{2}\frac{w^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = mc^2 w^{-\frac{1}{2}} + C$$

Daí temos que, $K = \gamma mc^2 + C$

Como imposição queremos que $v = 0 \rightarrow K = 0$, assim,

$$0 = mc^2 + C \rightarrow C = -mc^2$$

Finalmente,

$$K = \gamma mc^2 - mc^2$$

Essa então é a energia cinética relativística, que utiliza a definição de momento relativístico e, portanto, considera os efeitos de dilatação temporal e contração espacial.

Para a física clássica quando um corpo se movimenta, ele possui energia pelo fato de estar se movimentando (essa é a energia cinética), e, desprezados outros fenômenos, essa será a energia total (E_T) que o corpo possui.

$$E_T = K$$

Porém, para a relatividade, como vimos acima, surge um elemento a mais nas contas, uma parcela de energia que é constante, independente da velocidade do corpo. Chamamos essa quantidade de energia de Energia de Repouso, pois parados ou em movimento, todos os corpos irão possuir essa quantidade de energia, que depende apenas de sua massa. Temos então

$$\gamma mc^2 = K + mc^2$$

Do lado direito, temos a energia cinética (relacionada ao movimento) mais a energia de repouso (energia constante que todos os corpos possuem pelo fato de existirem, que depende da massa que este corpo possui). A soma dessas duas quantidades de energia será a energia total que esse corpo possui.

$$E_T = K + E_0$$

E_0 então representa a Energia de Repouso de um corpo, e é dada pela expressão abaixo

$$E_0 = mc^2$$

ou

$$E = mc^2$$

6. Referências

HALLIDAY, D., RESNICK, R., **Fundamentos de Física 4**. 8 ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., **Física 2**. 4 ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1996.

NORBURY, J. W., **General Relativity & Cosmology for Undergraduates**, 1997.

NUSSENZVEIG, H. M., **Curso de Física Básica 4**. 1 ed. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1997.

SCHULZ, Peter A., Duas nuvens ainda fazem sombra na reputação de Lorde Kelvin. **Rev. Bras. Ensino Física**, v. 29, n. 4, p. 509-512, 2007.

COMO GANHAR DINHEIRO COM PROBABILIDADE

Matheus Littig Radinz, Gabriela Provedel Dalla Bernardina, Matheus Murelli Rocha, Perseu Fernandes Machado de Oliveira, Thyago Vieira Piske, Douglas Araujo Victor, Michel Guerra de Souza

mlittigradinz@gmail.com

Resumo: Esse trabalho remete-se a problemas e outras questões na área da probabilidade, que mesmo com respostas aparente óbvias e intuitivas, após análises cuidadosas, revelam-se grandes surpresas ou até mesmo armadilhas que podem ser usadas contra você. A solução destes demonstra-se interessante e de baixa complexidade em sua maioria, tornando-se de grande interesse do leitor e do ouvinte. Apresenta-se e explica-se problemas famosos, como o de Monty Hall (20- ?), e outros nem tanto, como o dos Aniversários (sem data).

Palavras-chave: Probabilidade, Lei de Benford, Problema de Monty Hall, Problema do aniversário.

1. Introdução

O estudo da probabilidade como ramo da Matemática surgiu em meados do século XV, muito provavelmente em uma mesa de apostas, entre jogos de azar. Apesar disso, jogos de azar já estavam presentes há muito mais tempo na humanidade, há registros de que em 1200 a.C. já havia uma espécie primitiva de dado, como afirmam Celi Espasandin Lopes e Elaine Meirelles em seu texto Estocástica nas Séries Iniciais (2005).

Enquanto alguns desbravavam continentes em busca de riquezas, outros buscavam estudar regularidades em jogos de apostas para assim inferir previsões sobre esses jogos e obter vantagem. A ganância humana mais uma vez motivando seu desenvolvimento. Um desses foi Girolamo Cardano (1501-1576), matemático e exímio jogador, este pôs-se a analisar os jogos de dados e cartas, reunindo suas pesquisas no Livro dos jogos de azar, de 1526, e dando assim o pontapé inicial na Teoria da Probabilidade, trazendo um método teórico para calcular esta, até então inexistente.

2. Problema de Monty Hall

Um famoso problema de probabilidade e de surpreendente resposta é o Problema de Monty Hall. Imagine a seguinte situação, você está na década de 1970 em um programa de tv famoso por dar prêmios, para você ganhar o maravilhoso Ford Mustang 74 você deve escolher a porta correta entre três indistinguíveis, a qual esconde o automóvel. Ao

escolher uma das portas, o apresentador do programa, tendo ciência de onde o carro está, abre uma das portas que você não escolheu e que o carro não está. Neste momento ele pergunta a você se deseja mudar a porta escolhida, você mudaria? Haveria alguma vantagem em mudar?

A resposta parece óbvia e logo enchemos nossos peitos para exclamar um "ora, tanto faz mudar, dentre duas portas, teremos 50% de chance em cada", porém apesar de correta, esta informação está equivocada quanto ao uso nesse problema, o mais vantajoso seria mudar, e o porquê será explicado adiante.

Consideremos o momento inicial, ao escolher uma porta, a probabilidade de ter escolhido a porta correta é de $\frac{1}{3}$, e a do erro, ou em outras palavras, a de que o carro esteja atrás de uma das outras 2 portas, é de $\frac{2}{3}$. Ao abrir uma porta onde não há nada atrás, as probabilidades não são alteradas, portanto continuará tendo $\frac{1}{3}$ de chance de o carro estar atrás de sua porta e $\frac{2}{3}$ de estar na outra. Sendo assim, tem o dobro de chance se trocar e por consequência inverter as probabilidades.

Para tornar mais claro, considere dentre as portas A, B e C, que o carro sempre estará atrás da porta A, e adotemos que sempre irá trocar de escolha assim que o apresentador perguntar. Sua escolha poderá ter sido A, B ou C, o apresentador então abre uma porta revelando o vazio, ao trocar A, você perderá, porém ao trocar B e C, ganhará, retornando a probabilidade de $\frac{2}{3}$ (DE SÁ, 2008).

Este problema, além da fácil explicação, também é de fácil reprodução, visto que as portas podem ser trocadas por infinitos objetos, assim como o prêmio, como mostrado por Leonard Mlodinow em O andar do bêbado (2008). No Ifes Campus Vitória foi realizada uma de suas formas, uma simples brincadeira com três copos e um bombom, onde experimentalmente, foi analisado essa probabilidade, dentre os nove participantes que alteraram, seis alcançaram sucesso. Outro dado importante encontrado foi o de participantes que consideraram não haver diferenças entre trocar ou não, 64%, mais da metade dos participantes, trazendo à tona o quanto é um erro probabilístico comum.

3. Intuição X Probabilidade

"É mais provável que alguém dê aula, ou que um professor dê aula? ". A maioria de nós responderia que é mais provável que um professor dê aula. Há um forte pensamento

intuitivo ao responder a esta pergunta, pois é comum vermos professores dando aulas todos os dias. Mas o que é realmente mais provável? Que alguém dê aula.

A resposta para esta pergunta, sob um pensamento matemático, é baseada em uma das principais noções da probabilidade: a probabilidade de um evento A ocorrer é maior do que a probabilidade de dois eventos A e B ocorrerem simultaneamente. No exemplo, "dar aula" é o evento A, e "ser professor" é o evento B. Sabendo que qualquer pessoa pode dar aula, e que o professor é alguém, a probabilidade de alguém dar aula (evento A ocorrer) é maior do que a probabilidade de um professor dar aula (eventos A e B ocorrerem simultaneamente). A mesma ideia pode ser aplicada para outros exemplos.

"É mais provável que relampeje amanhã, ou que relampeje com chuva amanhã? ". A resposta correta é que relampeje amanhã (evento "relampejar" ocorrer), porém é muito comum relampejar quando está chovendo, portanto, a maioria de nós logo pensa, intuitivamente, que é mais provável que relampeje com chuva amanhã (eventos "relampejar" e "chover" ocorrerem simultaneamente).

"É mais provável que alguém gripado tenha febre, ou que alguém gripado tenha febre e tosse? " Evento A: ter febre. Evento B: ter tosse. É muito comum alguém gripado ter tosse, portanto muitas pessoas respondem que é mais provável que alguém gripado tenha febre e tosse (eventos A e B ocorrerem simultaneamente), o que é um pensamento intuitivo. Sob um pensamento matemático, percebe-se que é mais provável que alguém gripado tenha febre (evento A ocorrer).

"É mais provável que dois eventos ocorram, ou que cada evento ocorra individualmente? ". É mais provável que cada evento ocorra individualmente. No caso desse exemplo, a pessoa é levada a pensar matematicamente, e analisar o que é realmente mais provável nos exemplos anteriores, chegando à conclusão de que muitas vezes é mais vantajoso confiar na probabilidade.

4. Lei de Benford

O ano foi 1938 e seu nome era Frank Benford. Benford era físico e ficou intrigado com uma observação que ele tinha constatado em seus conjuntos de dados. Ele observou que apesar de seus dados serem aparentemente aleatórios, os primeiros dígitos tinham uma distribuição muito estranha. Por exemplo, se pensarmos na sucessão de potências de 2, o que será que pode se tirar de comum?

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

Considere agora apenas o primeiro dígito de cada número: 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1.... Observe agora quantas vezes apareceu o número 1? E o número 2? E os demais? Pois foi o que Frank Benford fez em seus dados. Ele observou que mesmo em tabelas de números aleatórios, o número 1 sempre aparecia mais que o número 2, o número 2 mais que o número 3 e assim até o dígito 9. Pode-se pensar que é um absurdo, pois na conhecida distribuição de probabilidade uniforme, todo número têm a mesma chance de ser escolhido com a probabilidade 1/(tamanho do intervalo). Mas incrivelmente, mesmo nessa distribuição, retirando-se apenas o primeiro dígito, a "Lei de Benford" é obedecida (TEIXEIRA, s.d.).

A lei vale sempre? Não, pois é uma lei empírica e se o leitor pegar uma lista telefônica com prefixo (31) por exemplo, não vai encontrar nenhum dígito primeiro 1. Mas é uma lei muito interessante quando se trata de dados aleatórios e em boa quantidade. A fórmula da Lei de Benford para calcular a probabilidade de cada primeiro dígito é o logaritmo de $\left(1+\frac{1}{d}\right)$ na base 10, ou

$$P(d) = log\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

Então a tabela de "chances" de aparecimento do primeiro dígito para dígitos de 1 a 9, elaborada por Benford, é a seguinte:

Tabela 1 - Aparecimento dos dígitos

Primeiro dígito	***Probabilidade***
1	30,1%
2	17,61%
3	12,49%
4	9,69%
5	7,92%
6	6,69%
7	5,80%
8	5,12%
9	4,58%

Fonte: Os autores

Se o leitor fizer o gráfico desta lei, poderá observar o conhecido decaimento exponencial da probabilidade, mostrando que os primeiros dígitos com os primeiros números naturais têm mais chance de aparecer do que os últimos. Poderia ser apenas mais uma curiosidade

matemática que faz um leigo rir, brincar e esquecer. Mas com o advento do computador, coisas mais sérias começaram a aparecer em cima dessa lei.

Por exemplo, depois da década de 1980 ela começou a ser usada para verificar a veracidade de dados que se diziam aleatórios. Ou seja, começou a ser usada para verificar crimes em mesas de jogos, em jogos eletrônicos de apostas pois é barata e apenas uma pequena coleta de dados é suficiente para atestar a verdadeira aleatoriedade de dados ou não. Então, a receita federal dos EUA, em 1998 implementou essa lei em seu sistema de rastreamento de fraudes. Por exemplo, valores de despesas que estão aparecendo com muitos dígitos iniciais 3, um aparecimento maior que 12%, é sinal que algo de errado existe na declaração de imposto de renda. E o mais impressionante é que fraudes históricas nos EUA compreendendo dados de grandes empresas foram descobertos e estavam corretos, somente pela aplicação da lei de Benford.

5. Problema do Aniversário

Por mais que pareça improvável para sua intuição de que numa sala de 33 tenham, pelo menos, 2 pessoas que fazem aniversário no mesmo dia, a probabilidade nos mostra que não, que é quase tão provável que você nem imagina em números.

Ainda sobre essa mesma sala, vamos falar da possível chance de coincidirem aniversários, qual seria ela? Bom, se foi dito 77,5%, você acertou, mas esse valor parece muito maior do que qualquer um pode imaginar à primeira vista, porém a nosso cálculo é correto, após compreender o passo a passo, vai ficar muito mais evidente o percentual citado anteriormente.

Para chegar na porcentagem tratada acima é necessário saber como chegou-se em uma forma generalizada de calcular.

Sempre desconsiderando anos bissextos, temos a quantidade de pessoas tratadas como n e os seus aniversários por 365^n, isto é, um arranjo simples de 365, havendo repetição, n a n. Assim, para chegar na quantidade de pessoas que fazem aniversário em dias diferentes é feito, sendo um arranjo simples do número 365, também de n a n.

Consequentemente, a chance de não coincidir um aniversário é dada pela expressão

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

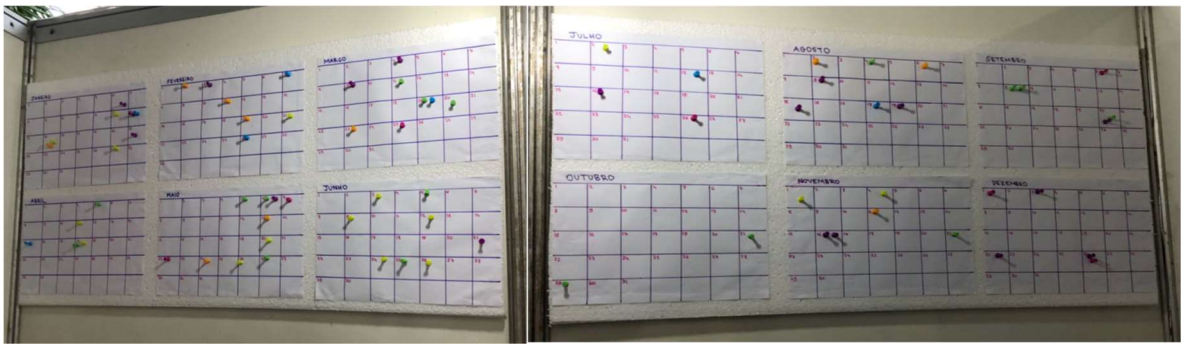
E, portanto, fazendo uso da probabilidade do complementar, chegamos ao resultado esperado:

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

Assim, a expressão acima nos fornece a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do ano dentre n pessoas (DE SÁ, s.d.).

Para visualizar e confirmar a veracidade deste resultado confrontando-o com uma possível resposta intuitiva, entrevistamos 75 pessoas durante a feira de Matemática que ocorreu no dia 18 de maio no Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes. Dentre essas 75 pessoas, houve 9 pares de pessoas que aniversariavam no mesmo dia, como mostrado na figura 1. Ao serem indagadas sobre a probabilidade de ocorrer pelo menos um par de pessoas com esta configuração, a resposta dada era a clássica, porém intuitiva, de que essa probabilidade é próxima de zero. Mas, afinal, qual é a probabilidade de que dentre 75 pessoas, existissem pelo menos duas pessoas que fizessem aniversário no mesmo dia? Para responder a esta pergunta, faz-se necessário utilizar a fórmula demonstrada acima, chegando a um valor próximo, porém superior a 99,5%, ou seja, era mais que certo de ter, ao menos, uma coincidência de aniversário, evidenciando, mais uma vez, que a intuição pode ser prejudicial ao avaliarmos certas situações.

Figura 1: (a) e (b) - Calendários, os alfinetes representam as datas de aniversário dos participantes.



Fonte: Os autores.

6. Como Ganhar Dinheiro com Probabilidade

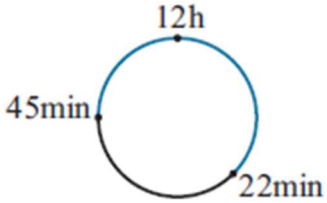
Outro jogo bastante interessante é o seguinte:

Uma filha propõe uma aposta à sua mãe. Se a filha ganhar, a mãe aumenta sua mesada em 5%, se perder, perde também sua mesada.

A mãe sorteia dois pontos em uma circunferência dividida em 60 partes, como um relógio (figura 2). Caso o risquinho do 12 caia no maior arco determinado por estes dois pontos, a filha ganha; caso caia no menor arco, a mãe ganha; caso haja um empate, jogam novamente.

A mãe, com um raciocínio intuitivo, pensou que ela e a filha teriam a mesma chance de ganhar e aceitou a proposta. Após perder para a filha, continuou jogando sozinha, curiosa, percebendo que quase sempre perdia. Vamos analisar matematicamente a probabilidade de a mãe ganhar o jogo:

Figura 2: Representação do jogo do relógio



Fonte: http://www.rpm.org.br/cdrpm/68/9.html

A diferença entre os valores sorteados tem de ser pelo menos 31 unidades para que a mãe ganhe. Caso a diferença seja de 30 unidades, há um empate. O número 60 não pode ser escolhido pois, neste caso, o risquinho do 12 estaria contido em ambos os arcos. Assim:

Supondo que o 1º número sorteado foi o número 1, a mãe ganha se o 2º número for qualquer número no intervalo de 32 a 60, algo que possui probabilidade de ½, pois ele pode cair em dois intervalos possíveis, de praticamente a mesma quantidade de números - pode ser (1,31] ou [32,60).

Supondo que o 1º número sorteado foi o número 27, a mãe ganharia apenas se o 2º número for um número de 58 a 60, como este intervalo é muito pequeno em comparação ao outro intervalo possível do sorteio do 2º número- [1,57], excluindo-se o 27 -, a probabilidade de que isso ocorra é quase zero.

Podemos então perceber que, no melhor dos casos, a probabilidade de que a mãe ganhe é ½ e no pior dos casos é 0. Como o 1º número sorteado pode ser qualquer um no intervalo de 1 a 60, a probabilidade da mãe ganhar é o ponto médio destas probabilidades: $(0 + ½)/2$, o que é igual a ¼, ou 25% de chance (RIFO, 2015).

Este é um ótimo exemplo de como a intuição pode, por vezes, nos enganar e até nos fazer perder dinheiro. O conhecimento matemático deste tipo de problema pode ser usado tanto para enganar - dependendo do seu grau de honestidade, ao oferecer apostas aparentemente justas, como essa, a desavisados por aí -, quanto para não se permitir ser enganado.

A simulação deste jogo no campus do Ifes, através do "relógio" mostrado abaixo (figura 3), demonstrou-se de muito sucesso entre os alunos, que ficaram bastante surpresos com o resultado, quase sempre desfavorável para quem estava representado o lado da mãe.

Figura 3: Fotografia feita no evento, mostrando a circunferência utilizada na simulação do jogo

Fonte: Os autores.

7. Conclusão

O surgimento da probabilidade é relacionado à disseminação dos jogos de azar na Idade Média, que era praticado envolvendo apostas. Apesar de os jogos terem impulsionado o desenvolvimento das teorias das probabilidades, essa parte da matemática tem aplicações importantes em nosso cotidiano e em outras ciências.

Utilizamos frequentemente cálculos de probabilidade de forma intuitiva em nosso cotidiano. Por exemplo, ao acordar, precisamos decidir que horas sairemos de casa, de acordo com as chances de o trânsito estar congestionado ou não. Precisamos decidir se saímos com um guarda-chuva, de acordo com as chances de chover. Ou se saímos de casaco, de acordo com a possibilidade de estar frio ao longo do dia.

Além das utilidades no cotidiano, o estudo da probabilidade se mostra de extrema importância também para aplicações diretas nas ciências. Como na Biologia, na Segunda Lei de Mendel, por exemplo, que permite o cálculo das probabilidades de determinados genes serem passados para os filhos; na Medicina, onde a probabilidade é utilizada para a prevenção de doenças; na Meteorologia, para a previsão do tempo; assim como na Física Quântica, Economia, Estatística, Engenharia, Química, entre muitas outras áreas onde a probabilidade também é usada.

Visto que a probabilidade indica quais são as chances de um evento ocorrer, esta não é capaz de tornar ninguém um adivinho ou um vidente, apesar de se mostrar de grande importância para a vida no planeta. Esse estudo das probabilidades, que começou por acaso como um artifício para se ganhar nos jogos, hoje nos ajuda a tomar decisões tanto no cotidiano quanto nas ciências.

8. Referências

RIFO, Laura. **Tempo de Espera:** Paradoxo e Aplicações. 2015. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/divulga/paradoxoTespera.pdf>. Data de publicação: 29/09/2015. Acesso em: 09 de jun. de 2018.

LOPES, Celi; MEIRELLES, Elaine. **Estocástica nas Séries Iniciais.** 2005. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Data de publicação: 2005. Acesso em: 12 de jun. de 2018.

TEIXEIRA, Alexandre; KIRA, Elisabeti. **Lei de Benford e aplicações.** [Entre 2009 e 2018]. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~abe/lista/pdfr6aqDSXtbC.pdf>. Acesso em: 12 de jun. de 2018.

DE SÁ, Ilydio. **Paradoxos e Probabilidade:** O Problema da Coincidência dos Aniversários. [20-?]. Disponível em <http://www.magiadamatematica.com/uss/pos/06-aniversario.pdf>. Acesso em: 13 de jun. de 2018.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. 2008. Tradução de Diego Alfaro. Ed. de bolso. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

RIFO, Laura. **Probabilidade e Decisões**. [20-]. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/68/9.html> Acesso em: 13 de jun. de 2018.

DE SÁ, Ilydio. **A porta dos desesperados (ou o problema de Monty Hall)**. 2008. Disponível em: <http://www.magiadamatematica.com/wordpress/wp-content/uploads/2012/03/BOLETIM-GEPEM-52.pdf>. Data de publicação: Janeiro/Junho de 2008. Acesso em: 14 de jun. de 2018.

GPS E AVIÕES: REVOLUCIONANDO O RASTREAMENTO DO ESPAÇO AÉREO

Bianca Pina Bello, Emanuelle Ladaim Freire, Juliana Marcarini Carloni, Luísa Gonzaga Barcelos

bianca.pbello@gmail.com

Resumo: Esse trabalho trata da história e funcionamento do GPS (*Global Positioning System*) e sua aplicação nos aviões. Seu funcionamento envolve a área de Geometria Analítica e desenvolvimento de sistemas com o uso de matrizes e determinantes. Com relação ao uso nos aviões, explica-se a respeito do ADS-B (*Automatic Dependent Surveillance-Broadcast*), seu sistema de funcionamento e suas relações tanto com o GPS quanto com o sistema atual de localização de aeronaves, através de radares.

Palavras Chave: GPS. Satélites. Geometria Analítica. Aviões. ADS-B.

1. Introdução

O objetivo dessa pesquisa foi relacionar a matemática, mais especificamente o cálculo de matrizes e determinantes – um dos temas estudados pelas autoras na disciplina escolar no ano de 2018 – com algo presente no dia a dia dos seres humanos, o que foi alcançado no estudo do GPS e suas aplicações. Durante as conversas entre as alunas e os professores orientadores, surgiu a ideia de apresentar como assunto o GPS, algo que já se tornou comum nas vidas humanas e que envolve os cálculos citados. E, após o grupo ler uma matéria do site BBC sobre a queda do avião da Malaysia Airlines no Oceano Pacífico em 2014 (que foi usado como referência para esse artigo), foi decidido acrescentar a discussão sobre o sistema atual de localização de aviões e como os avanços na tecnologia do GPS permitiram a criação de um sistema avançado para a determinação do posicionamento de tal meio de transporte, o ADS-B.

2. Apresentação do GPS

O GPS (*Global Positioning System*) é um sistema de posicionamento que fornece a um receptor móvel sua localização exata, a qualquer momento e em qualquer ponto da superfície terrestre. Sua história inicia-se no período da Guerra Fria, mais especificamente durante a Corrida Espacial. Após a União Soviética, em 1957, lançar o primeiro satélite,

o Sputnik, o Departamento de Defesa dos Estados Unidos desenvolveu o NAVSTAR (*Navigation Satellite with Time and Ranging*, o antecessor do GPS), um programa que era capaz de encontrar lugares no globo com o auxílio de satélites dispostos em órbitas posicionadas ao redor da Terra.

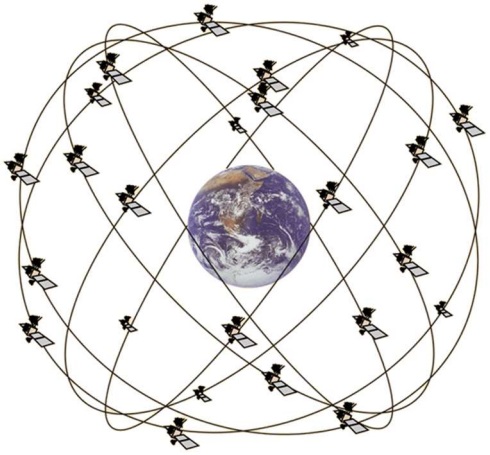
Quando lançado, em 1973, o NAVSTAR possuía dois modelos: o militar, que utilizava satélites e receptores militares muito precisos, representando uma grande vantagem bélica, principalmente no uso de mísseis e no posicionamento de tropas terrestres, por exemplo, e o civil, que utilizava equipamentos de menor qualidade, tendo uma exatidão menor, com uma margem de erro em torno de 65 metros. Com o fim da Guerra Fria, o modelo civil foi desativado e os Estados Unidos (EUA) aperfeiçoaram o NAVSTAR militar, que recebeu o nome de GPS. Esse novo sistema foi disponibilizado pelos EUA para o público em geral, que pode ter acesso a equipamentos melhores por um baixo custo.

O GPS utiliza um programa chamado GNSS (*Global Navigation Satellite System*), que é um conjunto de sistemas que permitem a localização exata de um receptor móvel na terra através de aparelhos que captam ondas de rádio emitidas pelos satélites. Como aponta Felipe Nievinski em sua apostila para a Universidade de São Paulo (USP), o GNSS não é exclusivo do GPS, já que o GLONASS (Rússia), o Galileo (União Europeia) e o Compass (China), todos exemplos de sistemas de localização, também o utilizam. Porém, apenas o GPS e o GLONASS estão operando em sua capacidade total, enquanto o Galileo e o Compass estão em fase de desenvolvimento, com previsão de lançamento e operação completa em 2020. Uma característica comum a todos os sistemas inclusos no GNSS é a acuracidade do tempo. Cada satélite possui quatro relógios atômicos, dois de césio e dois de rubídio, com precisão na casa dos nanossegundos, mas ainda não são perfeitos. Apenas 0,000000001 segundos de falha na contagem do tempo é suficiente para causar um erro de, aproximadamente, 30 centímetros na medição da distância para um satélite. Para evitar ao máximo esses erros, que causariam uma série de transtornos, todos os relógios de todos os satélites são constantemente sincronizados com um relógio mestre localizado na Terra.

3. Funcionamento do GPS

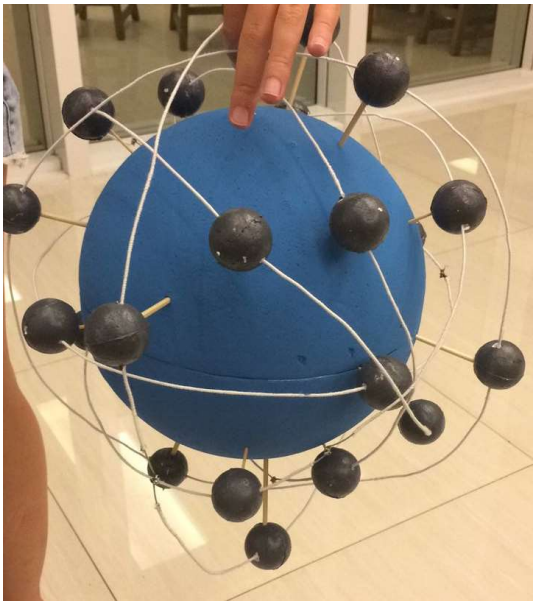
Segundo Alves (2004), ao todo, são 32 satélites ao redor do planeta, sendo 24 deles em funcionamento e os outros oito em caso de falha de algum dos principais. Os 24 satélites efetivos estão dispostos em seis órbitas ao redor da Terra, com quatro satélites por órbita, a 20.200 km de altura da superfície terrestre e com um ângulo de visualização de, aproximadamente, 28°. Cada satélite completa uma volta ao redor da Terra a cada 12 horas, sendo duas órbitas por dia, de forma que qualquer ponto da superfície terrestre esteja sendo visualizado por, pelo menos, quatro satélites.

Figura 6: Representação das órbitas dos satélites.



Fonte: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/gps.html

Figura 2 - Maquete realizada pelas autoras representando as órbitas dos satélites para apresentação na Feira de Matemática.



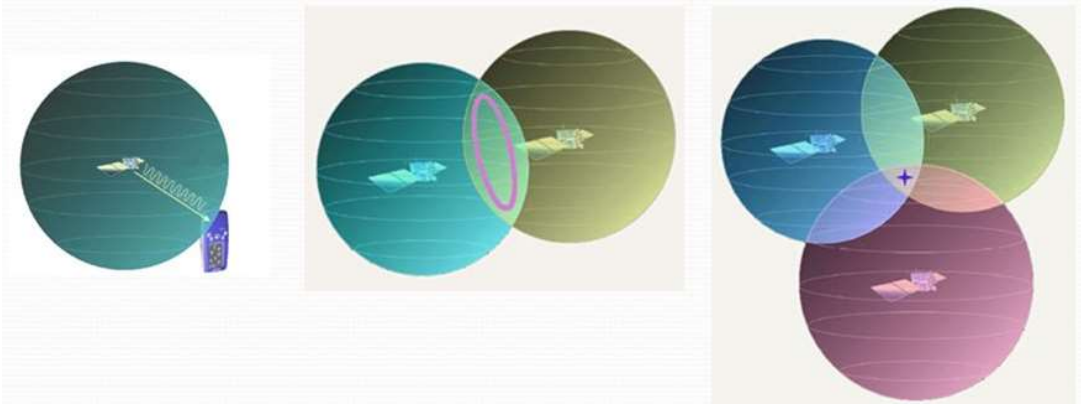
Fonte: Os autores.

Existem cinco estações terrestres de gerenciamento do posicionamento dos satélites ao redor da Terra, sendo a principal no Colorado, Estados Unidos. Os satélites são programados para enviar uma série de informações para as estações de gerenciamento, tais como: altura em relação ao solo, angulação e velocidade. Essas estações, então, processam essas informações e analisam o desempenho total do sistema, enviando correções de posicionamento de volta para os satélites.

Para facilitar o entendimento de como o GPS opera, consideremos, inicialmente e para simplificação dos cálculos, que os relógios dos receptores (localizados na Terra) e dos satélites estão sincronizados, pois, no mundo real, devido aos efeitos da velocidade e da gravidade, o tempo "passa de modo diferente" (posteriormente faremos os cálculos considerando essa distorção). Sendo assim, com o intuito de calcular a posição de algo ou alguém na Terra, recorre-se ao método da triangulação, isto é, usam-se satélites com posição já conhecida para determinar uma posição desconhecida. Esses cálculos são feitos a partir de conceitos de geometria analítica e de matrizes e determinantes, fazendo uso, principalmente, de uma equação que descreve uma esfera, a qual é dada por $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, em que $a, b\ e\ c$ são as coordenadas do centro da esfera e r é o raio. Ela possui esse formato, porque todos os pontos de uma esfera, quaisquer que sejam suas coordenadas x, y e z, têm a mesma distância do centro, ou seja, o raio. Portanto, utilizando o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre pontos, chega-se à equação da esfera. No caso do GPS, faz-se necessária a utilização de pelo menos três satélites da seguinte maneira: o receptor "mede" o tempo que o sinal do primeiro satélite leva para chegar até ele; desse modo, é determinada a distância do receptor até o satélite, através da multiplicação do tempo pela velocidade da luz, podendo, consequentemente, formar uma esfera com centro no satélite e tendo como raio a distância calculada, como pode ser observado na figura 3. Para o segundo satélite, realiza-se o mesmo procedimento, formando outra esfera. A interseção dessas duas figuras geométricas, ou seja, o lugar geométrico dos pontos em comum das duas esferas forma uma circunferência, e isso restringe os possíveis lugares onde o receptor possa estar, mas ainda não é suficiente (figura 3). A fim de corrigir o problema, um terceiro satélite é necessitado e os procedimentos são novamente repetidos. A terceira esfera criada intersecta a circunferência em dois pontos, em um dos quais está o receptor. Propositalmente, os satélites do sistema GPS foram posicionados de forma que sempre um desses pontos está

localizado fora do planeta Terra, restando apenas uma solução plausível, a qual representa a localização do receptor (figura 3).

Figura 3 - Processo de formação das esferas.

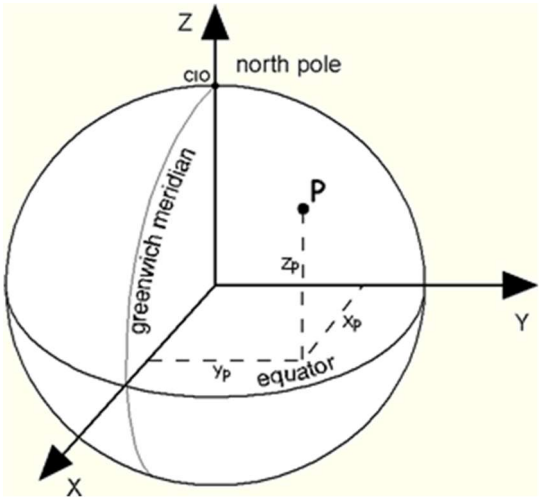


Fonte: http://slideplayer.es/slide/8217425/

Os cálculos serão representados a seguir:

1. Equação da primeira esfera: $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2=c^2t_1^2$, em que $(a_{1,}b_1,c_1)$ são as coordenadas do primeiro satélite, ou seja, são as coordenadas do centro da esfera, r_1 é o raio da esfera, isto é, a distância do satélite ao receptor, t_1 é o tempo que o sinal demora para chegar e c é a velocidade da luz.
2. Equação da segunda esfera: $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2^2=c^2t_2^2$, em que $(a_{2,}b_2,c_2)$ são as coordenadas do segundo satélite, r_2 é o raio da esfera e t_2 é o tempo.
3. Equação da terceira esfera: $(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2=r_3^2=c^2t_3^2$, em que $(a_{3,}b_3,c_3)$ são as coordenadas do terceiro satélite, r_3 é o raio da esfera e t_3 é o tempo (figura 3).

Figura 4 - Sistema tridimensional de coordenadas na Terra.



Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAABJTsAD/aulas-geodesia

Com isso, forma-se um sistema de equações quadráticas, porém ele pode ser transformado em linear a partir da subtração de equações. Assim, desenvolvendo as expressões e subtraindo a terceira equação da primeira e a terceira da segunda, obtém-se:

- $x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2yb_1 + b_1^2 + z^2 - 2zc_1 + c_1^2 - x^2 + 2xa_3 - a_3^2 - y^2 + 2yb_3 - b_3^2 - z^2 + 2zc_3 - c_3^2 = c^2t_1^2 - c^2t_3^2$.
- Assim, pode-se reescrever essa expressão como $2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z = A_1$, onde $A_1 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2)$.
- De maneira análoga, também é obtida a seguinte expressão: $2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z = c^2t_2^2 - c^2t_3^2 = A_2$, em que $A_2 = c^2(t_2^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2)$.

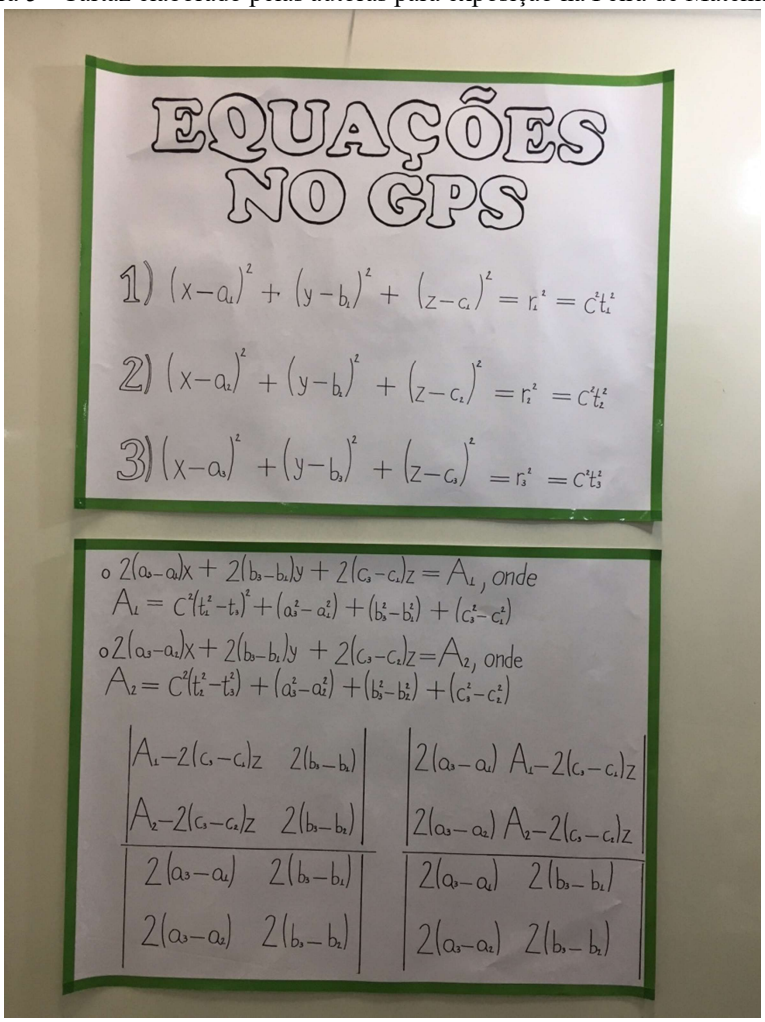
Utilizando essas duas novas equações, forma-se um sistema de duas incógnitas com o valor de x e o valor de y em função de z, o qual pode ser resolvido pela Regra de Cramer.

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y = A_1 - 2(c_3 - c_1)z$$
$$2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y = A_2 - 2(c_3 - c_2)z$$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} A_1 - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{bmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2(a_3 - a_1) & A_1 - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & A_2 - 2(c_3 - c_2)z \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{bmatrix}}$$

Figura 5 - Cartaz elaborado pelas autoras para exposição na Feira de Matemática.



Fonte: Os autores.

Após serem descobertos os valores de x e y em função de z, substituem-se esses valores na terceira equação, por fim achando z. Vale ressaltar que existe a garantia de que o determinante do sistema é não nulo, pois os satélites foram posicionados de forma que eles não sejam coplanares.

Agora, serão feitos os cálculos que levam em consideração as dificuldades geradas pelo tempo, isto é, na realidade, os tempos medidos são extremamente curtos e mesmo que o satélite possua um relógio atômico de alta precisão, os receptores “típicos” possuem um

relógio de menor qualidade (para caber no orçamento das pessoas), o que acarreta erros nas contas.

De acordo com Rousseau (2015), como o receptor não está em sincronia com os satélites, ele irá calcular três tempos "fictícios" T_1, T_2, T_3. Mas, para cada satélite utilizado, o erro entre o tempo fictício e o tempo real é igual, logo se pode escrever que $T_i = \tau + t_i$, onde T_i é o tempo fictício, t_i é o tempo real, τ é o erro e i varia de 1 a 3. Esse atraso no relógio introduz uma nova incógnita, τ, ao sistema de equações com incógnitas x, y e z, fazendo necessária a inserção de uma quarta equação. Isso é feito através da adição de outro satélite. Assim, o sistema terá o seguinte aspecto:

$$(x - a_1)^2 + (x - b_1)^2 + (x - c_1)^2 = c^2(T_1 - \tau)^2$$
$$(x - a_2)^2 + (x - b_2)^2 + (x - c_2)^2 = c^2(T_2 - \tau)^2$$
$$(x - a_3)^2 + (x - b_3)^2 + (x - c_3)^2 = c^2(T_3 - \tau)^2$$
$$(x - a_4)^2 + (x - b_4)^2 + (x - c_4)^2 = c^2(T_4 - \tau)^2$$

Da mesma forma que o sistema anterior, é possível subtrair equações para transformar as equações quadráticas em lineares. Uma das formas de fazer isso é subtrair a quarta equação de cada uma das outras. Com tal ação, o sistema transforma-se em:

$$2(a_4 - a_1)x + 2(b_4 - b_1)y + 2(c_4 - c_1)z = 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1$$
$$2(a_4 - a_2)x + 2(b_4 - b_2)y + 2(c_4 - c_2)z = 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2$$
$$2(a_4 - a_3)x + 2(b_4 - b_3)y + 2(c_4 - c_3)z = 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3$$
$$(x - a_4)^2 + (x - b_4)^2 + (x - c_4)^2 = c^2(T_4 - \tau)^2$$

Em que

$$B_1 = c^2(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_1^2) + (b_4^2 - b_1^2) + (c_4^2 - c_1^2)$$
$$B_2 = c^2(T_2^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_2^2) + (b_4^2 - b_2^2) + (c_4^2 - c_2^2)$$
$$B_3 = c^2(T_3^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_3^2) + (b_4^2 - b_3^2) + (c_4^2 - c_3^2)$$

Utilizando mais uma vez a Regra de Cramer, é possível calcular x, y e z em função de τ.

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{bmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2(c_4 - c_3) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{bmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{bmatrix}}$$

Descobertos os valores de x, y e z em função de τ, eles são substituídos na quarta equação, obtendo uma equação quadrática em τ, com isso serão achados dois resultados para o erro. Depois, substituem-se esses dois resultados de novo nos determinantes de x, y e z, e, da mesma forma que foi feito nos primeiros cálculos, elimina-se a solução não plausível. Ou seja, nesse processo, calculamos o valor de τ, que é o erro relacionado ao tempo, para achar a abscissa x, a ordenada y e a cota z do receptor. Além disso, como já citado anteriormente, há a garantia de que o determinante do sistema é não nulo.

4. GPS na Localização de Aviões

Como destacam Cugnasca, Ferreira e Paz em sua Revista para a USP, com o passar dos anos, o GPS foi difundindo-se e alcançando cada vez mais pessoas ao redor do mundo. Assim, surgiram diversas utilizações para ele além da localização, como na agricultura, para irrigar e/ou colher a plantação, ou no auxílio à prevenção de terremotos e *tsunamis*, ao identificar movimentações e acúmulos de energia na crosta terrestre e embaixo dela. Porém, uma das aplicações mais revolucionárias desse sistema é na localização de aviões, com a invenção do ADS-B (*Automatic Dependent Surveillance-Broadcast*).

Conforme o FAA (*Federal Aviation Administration-USA*), o ADS-B é um sistema criado por meio da *NextGen System*, um programa norte americano responsável por melhorar a infraestrutura do sistema aéreo. Ele foi desenvolvido para substituir o sistema de rastreamento aéreo atual, realizado por radares, deixando, assim, o tráfego aéreo o mais seguro, eficiente e preciso possível. O principal objetivo do ADS-B é providenciar à aeronave e à torre de comando informações precisas sobre a primeira, tais como localização, velocidade, altitude, entre outros.

Consoante a BBC, atualmente, o sistema de posicionamento dos aviões no céu é através da comunicação entre radares presentes nas aeronaves e torres de controle fixas na superfície terrestre. Os aviões enviam dados de seu posicionamento para as torres através de ondas de rádio, que processam e auxiliam a cabine de pilotagem durante a decolagem, trajeto e pouso com o uso dessas informações. Entretanto, esse sistema se mostra obsoleto de diversas formas. Primeiramente, ele possui um *delay* no recebimento de informações, que são renovadas a cada seis ou sete segundos, o que, muitas vezes, é responsável pelo atraso dos voos, além de fazer com que os aviões façam certos desvios em suas trajetórias. Além disso, essa demora faz com que o pouso dos aviões precise ser feito "por camadas", ou seja, a cada trecho de descida ele precisa ficar um tempo "estacionado" em certa altura aguardando o recebimento de novas informações necessárias para ele realizar a aterrissagem. Muito combustível é despendido nessas operações, o que causa um custo a mais nas passagens aéreas. Outro fator limitador do sistema de radar é a sua dependência de estações receptoras terrestres, o que faz com que grande parte do planeta, como oceanos e áreas montanhosas, não possua cobertura. Muitos aviões simplesmente "somem" dos radares por se encontrarem fora da área de cobertura deles. Ademais, esse sistema pode ser desligado manualmente dentro da cabine do piloto e para de funcionar em casos de impactos, seja em solo ou em água. Com isso, os aviões ficam expostos a grandes perigos devido às falhas no monitoramento.

O ADS-B vem com a promessa de mudar essa situação problemática do tráfego aéreo. Ele possibilita a torre de controle e a aeronave compartilharem informações sobre o posicionamento dela por, pelo menos, uma vez a cada segundo, gerando dados bastante atualizados. Segundo Sarina Houston, em um artigo para o site The Balance Careers, o ADS-B utiliza um conjunto de satélites próprios com a mesma distribuição que o GNSS e esses satélites geram informações apuradas voltadas para os aviões, que o GPS não envia para seus receptores, como velocidade e altura em relação ao solo.

De acordo com Richards, O'Brien e Miller, para a Aeromagazine, o ADS-B é um sistema variado, que pode ser dividido em duas diferentes funcionalidades: o ADS-B Out e o ADS-B In. O ADS-B Out tem a principal função, que é a de transmitir para a torre de controle e disponibilizar para o próprio piloto sua identificação, posição, velocidade, altitude e rota de viagem da aeronave. Assim, os dois possuem dados atualizados a todo o momento, facilitando o percurso.

O ADS-B In possibilita a aeronave de receber informações, em tempo real, sobre o tempo e o tráfego nos ares, assim como também estabelece uma comunicação direta entre diferentes aviões (se e somente se esses outros aviões também possuírem o ADS-B). Com isso, há o compartilhamento de informações, a fim de expandir o conhecimento do piloto para que o mesmo faça escolhas sábias e adequadas para cada situação.

Apesar de ser um programa novo, que ainda pode passar por melhorias, o ADS-B apresenta muitas vantagens. Conforme o site The New York Times, uma delas é a segurança, pois com o piloto ciente de todas as informações que esse sistema pode disponibilizar, as chances de acidentes ou colisões são diminuídas significativamente. E, mesmo que venha a ocorrer, a constante atualização dos dados do sistema (uma a duas vezes por segundo) pode providenciar a localização precisa da aeronave, facilitando a busca e o resgate. Além disso, o ADS-B diminui o "trânsito" aéreo, já que, ao facilitar a transmissão de informações, a torre de comando pode dar prosseguimento aos procedimentos de cada aeronave mais rapidamente, enquanto antes, muitas delas ficavam vagando e rodando no céu esperando os dados da torre. Outro ponto muito importante é que os aviões podem realizar as decolagens e aterrissagens em linha reta, e não mais em camadas, devido à rapidez na troca de informações. Consequentemente, há uma economia de combustível e uma redução na emissão de poluentes que, aliados à acessibilidade e baixo custo de implantação dos equipamentos, auxilia a tornar o sistema mais barato.

Devido a todas essas vantagens do ADS-B, os Estados Unidos promulgou uma lei decretando que as companhias aéreas que atuarem dentro do país devem possuir, no mínimo, o ADS-B Out em todos os aviões até o ano de 2025. Segundo Renato Vilela, em sua Monografia para a Universidade do Sul de Santa Catarina, em 2015 iniciaram-se pesquisas para a implantação desse sistema no Brasil. Seis estações receptoras de sinais ADS-B (quatro bases marítimas e duas terrestres) estão situadas na Bacia de Campos, integradas ao sistema de satélites SAGITÁRIO (Sistema de Gerenciamento de Informações de Tráfego Aéreo e Relatórios de Interesse Operacional), desenvolvido pela empresa Embraer. A partir de 2017, todos os helicópteros para transportar pessoas e cargas da base marítima para as plataformas petrolíferas devem possuir tanto o ADS-B In quanto o ADS-B Out, de forma a melhorar o monitoramento do tráfego das aeronaves. A previsão é que, até 2022, pelo menos trinta bacias como a de Campos possuam a tecnologia, além de dois centros de capacitação e formação de controladores de tráfego aéreo tenham laboratórios de pesquisas e simuladores de voo e de torre de comando com o sistema.

5. Conclusão

O desenvolvimento do artigo trouxe uma contribuição para o estudo científico da matemática envolvida no geoposicionamento via satélite, desde a forma de como a disposição dos satélites afeta o cálculo até o seu equacionamento. O artigo também agrega informações sobre o ADS-B, seu funcionamento e a sua importância para o atual espaço aéreo.

Os pontos centrais levantados pelo artigo são como o os dispositivos presentes no dia-a-dia conseguem determinar com precisão a posição em qualquer ponto da superfície terrestre e quais são as condições necessárias para isso. A abordagem utilizada foi demonstração das equações envolvidas, figuras que as ilustram e descrição dos métodos utilizados no processo.

Tendo em mente os objetivos desse trabalho, ele oferece informações para pessoas que possuem interesse em desenvolver pesquisas sobre satélites geoestacionários, assim como a respeito do rastreamento de aviões via ADS-B. Desta forma, também é exposto como a matemática desempenha um importantíssimo papel na atualidade ao ter diversos

empregos nas mais diferentes áreas, sendo o GPS e o ADS-B apenas alguns exemplos da infinidade de sistemas e usos dela.

Figura 6 - Stand das autoras na Feira de Matemática.

Fonte: Os autores.

6. Referências

ALVES, Sérgio. **A Geometria do Globo Terrestre.** II Bienal da Sociedade Brasileira-2004. Páginas 1-80.

Autor desconhecido. **How do you track a plane?** BBC. Disponível em: <http://www.bbc.com/news/world-asia-pacific-26544554>. Acesso em 22 de Março de 2018.

Autor desconhecido. **What is the Next Gen?** FAA. Disponível em: <https://www.faa.gov/nextgen/what_is_nextgen/>. Acesso em: 24 de Maio de 2018.

CUGNASCA, Carlos; FERREIRA, Waldir; PAZ, Sérgio. **Sistema de Posicionamento Global (GPS) e o Turismo.** Portal de revistas da USP. Disponível em: < https://www.revistas.usp.br/rta/article/download/63441/66184/>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

GUGLIOTTA, Guy. **An Air-Traffic Upgrade to Improve Travel by Plane.** The New York Times. Disponível em: <https://mobile.nytimes.com/2009/11/17/science/17air.html?ref=science&pagewanted=all>. Acesso em: 24 de Maio de 2018.

HOUSTON, Sarina. **How ADS-B Works: A Look at the Foundation of NextGen.** The Balance Careers. Disponível em: <https://www.thebalancecareers.com/how-ads-b-works-a-look-at-the-foundation-of-nextgen-282559>. Acesso em: 24 de Maio de 2018.

HOWELL, Elizabeth. **NAVSTAR: GPS Satellite Network.** Space. Disponível em: <https://www.space.com/19794-navstar.html>. Acesso em: 02 de Julho de 2018.

NIEVINSKI, Felipe. **Posicionamento por GPS para geofísica.** Universidade de São Paulo - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. Disponível em: < http://www.iag.usp.br/geofisica/sites/default/files/GPS_para_Geofisica.pdf>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

RICHARDS, William; O'BRIEN, Kathleen; MILLER, Dean. **New air traffic surveillance technology.** Aeromagazine. Disponível em: <https://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/articles/qtr_02_10/pdfs/AERO_Q2-10_article02.pdf>. Acesso em 29 de agosto de 2018.

ROUSSEAU, Cristiane; SAINT-AUBIN, Yvan. **Matemática e Atualidade-Volume 1.** Sociedade Brasileira de Matemática. Capítulo 1.

THOMPSON, Richard. **Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers.** Universidade do Arizona. Disponível em: < https://pdfs.semanticscholar.org/60d2/c444d44932e476b80a109d90ad03472d4d5d.pdf> . Acesso em: 29 de agosto de 2018.

VILELA, Renato Augusto Ramos. **Implementação e modernização do espaço aéreo brasileiro.** Universidade do Sul de Santa Catarina. Disponível em: <https://riuni.unisul.br/bitstream/handle/12345/4476/ADS-B%20IMPLEMENTA%C3%87%C3%83O%20E%20MODERNIZA%C3%87%C3%83O%20DO%20ESPA%C3%87O%20A%C3%89REO%20BRASILEIRO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 29 de agosto de 2018.

JOGO EDUCATIVO USANDO O GEOPLANO PARA ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Daniel Redinz Mansur, Tayara Gomes da Cruz

redinz@gmail.com

Resumo: Jogos educativos são importantes aliados do ensino formal de matemática, consistindo em um recurso didático bastante utilizado na promoção da aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo, social e moral, agindo de forma mediadora entre o lúdico e o educativo, uma vez que estimula a exploração e a solução de problemas (Kishimoto, 2011). O jogo educativo apresentado na feira foi desenvolvido pelos autores deste trabalho e tem como base o Geoplano, um recurso bastante utilizado no ensino da geometria plana, que consiste em uma malha quadriculada formada por pregos igualmente espaçados e fixados em uma placa de madeira. Para a construção do Geoplano foram utilizados 225 pregos pintados alternadamente de preto e branco. Diante disso, os jogadores deverão, a partir de regras pré-definidas, tomar "Ações" para cumprir suas "Missões" e fazer o maior número de pontos para ser o vencedor. As "Missões" possuem diversos níveis de dificuldade e consistem em representar no Geoplano polígonos, demandando para isso conhecimentos específicos da Geometria Plana. Cada missão possui uma determinada pontuação graduada conforme seu nível de dificuldade. Após a introdução de determinados assuntos, o jogo possibilita o aprofundamento dos temas e pode auxiliar o professor na avaliação do aprendizado através da observação dos alunos enquanto jogam. Para a feira apresentamos um banner com as instruções necessárias para a aplicação e desenvolvimento do jogo: regras, importância e objetivos. Para sua realização utilizamos o Geoplano, elásticos coloridos, cartas com as "Missões" e cartas de "Ação". Assim, uma vez em contato com o jogo e suas regras, os participantes podem por meio do manuseio explorá-lo, pesquisando por meio de materiais manipulativos e a partir disso construir conceitos e visualizá-los no Geoplano. É importante ressaltar que a Geometria é disciplina que acompanha os alunos desde o início do ensino fundamental, mesmo que de modo não formal, e requer certo nível de abstração, com elevado número de conceitos que são introduzidos até o fim do ensino médio, sendo relevante que seu aprendizado seja realizado de forma consolidada. O jogo em comento aborda diversos temas específicos de Geometria Plana, tais como: ângulos, perímetro, área, propriedades de polígonos, polígonos côncavos, polígonos convexos e coordenadas cartesianas. Os temas a serem abordados podem ser selecionados de acordo com o público alvo, bastando para isso escolher o nível de dificuldade das cartas de "Missões" que serão utilizadas no jogo. Este jogo possui diversos elementos para tornar o aprendizado uma diversão, tendo como objetivo ser uma ferramenta de ensino que não fosse vista pelos alunos como uma imposição maçante. A partir da sua exposição na feira ao público em geral, em especial aos membros da comunidade acadêmica ligados à licenciatura em matemática, espera-se que ele poderá ser aplicado pelos autores desse trabalho, futuramente, em Oficinas e/ou Aulas, para as quais serão elaborados Relatos de Experiência, assim como poderá ser aplicado por professores como instrumento de auxílio didático em suas aulas.

Palavras Chaves: Jogo. Geoplano. Geometria. Aprendizado. Lúdico.

1. Introdução

A matemática enquanto disciplina acompanha os alunos desde os primeiros anos escolares até o final da educação formal e seguirá presente, inclusive, durante todo o restante da sua vida. Devido à sua magnitude e, por vezes, abstração, necessita de ferramentas e recursos auxiliares para facilitar a aprendizagem.

Neste sentido, os jogos educativos são importantes aliados no ensino da Matemática, pois permitem o aprendizado por meio do lúdico, segundo Moura (2011, p.85):

> Lembrado como importante elemento para a educação infantil, no processo de apreensão dos conhecimentos em situações cotidianas, o jogo passa a ser defendido como importante aliado do ensino formal de matemática.

No que diz respeito à Geometria, esta disciplina começa a ser apresentada aos alunos no início do ensino fundamental, mesmo que de modo não formal, e requer certo nível de abstração, com elevado número de conceitos que são aos poucos introduzidos até o fim do ensino médio, sendo relevante que seu aprendizado seja realizado de forma consolidada.

Dessa forma, é um equívoco que essa disciplina seja deixada de lado nos anos inicias do ensino fundamental. Nesta etapa do aprendizado, é importante para o professor ensinar utilizando materiais manipulativos, pois muitas vezes, simplesmente por meio de desenhos na lousa, fica difícil para o aluno visualizar, entender e fixar o conteúdo, podendo assim, gerar um desinteresse por não conseguir vincular o que está sendo estudado a algo do seu cotidiano.

Importante destacar o que consta nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica - DCN (Brasil, 2013, p. 91) sobre a manipulação de materiais na educação básica:

> Educar de modo indissociado do cuidar é dar condições para as crianças explorarem o ambiente de diferentes maneiras (**manipulando materiais da natureza ou objetos**, observando, nomeando objetos, pessoas ou situações, fazendo perguntas etc) e construírem sentidos pessoais e significados coletivos, à medida que vão se constituindo como sujeitos e se apropriando de um modo singular das formas culturais de agir, sentir e pensar. *(grifo nosso)*

Neste mesmo mote, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017, p. 41) também destaca a manipulação de objetos na educação infantil.

> [...] a Educação Infantil precisa promover experiências nas quais as crianças possam fazer observações, manipular objetos, investigar e explorar seu

> entorno, levantar hipóteses e consultar fontes de informação para buscar respostas às suas curiosidades e indagações.

Em decorrência disso, o jogo apresentado aborda diversos temas específicos de Geometria Plana, tais como: ângulos, perímetro, área, propriedades de polígonos, polígonos côncavos, polígonos convexos e coordenadas cartesianas. Os temas a serem abordados podem ser selecionados de acordo com o público alvo, bastando para isso escolher o nível de dificuldade das cartas de "Missões" que serão utilizadas no jogo.

Na educação moderna, há uma preocupação crescente com o processo de ensino-aprendizagem o qual insere o aluno em toda a cadeia de conhecimento e não mais é visto como um repositório de conteúdos didáticos. Neste processo, o próprio aluno passa a ser capaz de construir problemas, resolve-los e vincular o objeto de estudo ao meio em que vive.

Em uma realidade onde o ensino é fragmentado e descontextualizado, que prioriza a mecanização e a abstração, a utilização de jogos como material didático no ensino dentro de sala de aula se torna elemento de união dos diversos conteúdos matemáticos apresentados aos alunos ao longo dos anos de ensino formal.

2. Utilização de Jogos no Ensino da Matemática

Segundo o dicionário Michaelis (2018), a palavra "jogo" é definida como "Qualquer atividade recreativa que tem por finalidade entreter, divertir ou distrair; brincadeira, entretenimento, folguedo". Além disso, os jogos podem ser aliados da aprendizagem, facilitando o entendimento e fugindo do abstrato, além de trabalhar as habilidades dos alunos na construção de figuras e sua capacidade de resolução de problemas.

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática, a BNCC (Brasil, 2017, p. 274) orienta o uso de jogos da seguinte forma:

> [...] a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

Todos os jogos são dotados de regras que podem ser moldadas conforme o interesse do educador e a necessidade do educando. E, ainda, podem ser utilizadas na introdução de conceitos e na fixação de conteúdos. Quando utilizadas na introdução de conceitos, as regras são elaboradas de modo que o aluno execute determinados procedimentos que serão utilizados quando da formalização do conhecimento que o educador deseja introduzir. Já quando utilizadas na fixação de conteúdos, as regras permitem aos alunos experimentar e questionar o conhecimento que foi adquirido.

A pedagogia moderna tem mostrado que o indivíduo não aprende apenas como assimilador, mas sim constrói e participa do processo de aprendizagem. Uma vez que o indivíduo possui seus conhecimentos internos, que não podem ser ignorados, os novos elementos que passaram a fazer parte do ensino da matemática (como os aspectos culturais) passam a fazer parte de uma discussão, onde o jogo aparece como ferramenta de aprendizagem.

Utilizando-se, portanto, o jogo como ferramenta, deve ser levado em consideração o nível de conhecimento daqueles que estarão diretamente ligados a ele, uma vez que deverá ser usado em uma posição de desafio, sendo um elemento estimulador, permitindo ao aluno uma fixação de um conhecimento já obtido.

Os estudos no campo da psicologia, sociointeracionistas, também contribuíram para as discussões dos jogos no ensino da matemática, de acordo com este ramo da psicologia os jogos devem ter regras para que assim promovam processos de interação e mediação entre indivíduos de um mesmo grupo cultural. Para Leontiev (1988) por meio do jogo o sujeito é colocado frente a situações problemas, vivenciadas ou criadas.

Para Macedo (2003) o jogo está diretamente ligado à teoria do desenvolvimento humano de Piaget, onde podemos correlacionar as instâncias do jogo com o desenvolvimento humano, sendo eles: jogos de exercícios que se baseiam na assimilação de novos conhecimentos, o jogo simbólico que está ligado à apropriação do conhecimento e por fim os jogos de regras onde o sujeito é desafiado a se apropriar das regras e ao mesmo tempo deve se preocupar em criar estratégias para resolver os problemas no universo de possibilidades que o jogo possibilita para vencê-lo.

Para que o jogo seja eficiente, é necessário que o jogador entenda a situação lógica do jogo e assim ele absorva o conhecimento matemático que se deseja passar.

> "O jogo é, por natureza, uma atividade autotélica, ou seja, que não apresenta qualquer finalidade ou objetivo fora ou para além de si mesmo. Nesse sentido, é puramente lúdico, pois as crianças precisam ter a oportunidade de jogar pelo simples prazer de jogar, ou seja, como um momento de diversão e não de estudo. Entretanto, enquanto as crianças se divertem, jogando, o professor deve trabalhar observando como jogam. O jogo não deve ser escolhido ao acaso, mas fazer parte de um projeto de ensino do professor, que possui uma intencionalidade com essa atividade" (STAREPRAVO, 1996).

Kishimoto (1994) fez uma análise do papel do jogo na educação, uma vez que existam inúmeros materiais concretos, tais como: geoplano, material dourado, sólidos geométricos, dentre outros. Estes elementos levam a autora a questionar se estes materiais concretos são jogos ou apenas materiais pedagógicos. Sua conclusão, portanto, é que para que seja um jogo os materiais devem ser usados para criar momentos lúdicos, já os materiais pedagógicos são materiais meramente auxiliares aos docentes.

Já para Luckesi (2004), atividade lúdica é toda e qualquer que tenha total entrega do ser e afirma que nem sempre a atividade lúdica será divertida.

Em Gandro (2000), ressalta-se que o jogo na educação matemática pode buscar a construção de situações-problema e suas soluções por meio de conceitos matemáticos, pois quando o aluno está jogando ele cria estratégias e precisa testá-las para que assim possa vencer o jogo, possibilitando a investigação.

ORTIZ (2005) ressalta que o jogo, hoje, é considerado um ótimo método de aprendizagem e comunicação, em especial para aquelas crianças que participam diretamente na construção do processo de aprendizagem. E reitera o que diz o sétimo princípio da Declaração Universal de dos Direitos das Crianças (1959), que afirma que toda criança tem direito de desfrutar de jogos e brincadeiras voltados para a educação sendo de responsabilidade das instituições públicas o cumprimento deste princípio.

> "A criança desfrutará plenamente do jogo e das diversões, que deverão estar orientados para finalidades perseguidas pela educação; a sociedade e as autoridades públicas se esforçarão para promover o cumprimento desse direito" (ORTIZ, 2005).

Assim o jogo é uma forma de criar condições para que os alunos avancem com seus conhecimentos.

Em Borin (1996) podemos verificar que o autor corrobora os benefícios da introdução dos jogos durante as aulas de matemática, uma vez que alguns alunos apresentam certo bloqueio com relação à aprendizagem da Matemática e no decorrer do jogo demonstra

uma melhora no desempenho e ao longo do tempo os bloqueios são imperceptíveis.

Há uma dificuldade na aplicação de jogos onde não há uma preocupação e compromisso com a educação, por meio de interferências sistemáticas. Sem a função educadora, o jogo irá gerar "bons jogadores e maus jogadores" perdendo assim sua função de educação, sistematização e apropriação do conhecimento, ao qual o jogo se remete.

Apesar de todo o esforço na utilização de jogo como auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, importante destacar que ele por si só não é capaz de resolver todas as falhas presentes no processo. Por isso, o educador deve ser capaz de identificar os limites de aplicação do jogo para cada aluno e possuir alternativas didáticas de modo a garantir a eficácia do ensino, sendo este sim o objetivo final que almejamos.

3. Materiais e Métodos

Para feira foram elaborados dois conjuntos completos do jogo, cada um consistindo de um Geoplano personalizado, cartas de ação, cartas de missão e elásticos coloridos.

Buscando uma forma de potencializar a apreensão dos conceitos matemáticos, os alunos deverão utilizar conceitos da geometria plana para conseguir cumprir suas missões utilizando os elásticos coloridos e as cartas de ação. Trata-se de um jogo que requer do aluno interesse pela matemática.

4. Aplicação do Jogo Durante a Feira

Após o desenvolvimento do jogo a primeira aplicação foi realizada durante a 7ª Semana da Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Vitória que ocorreu durante os dias de 16 a 19 de Maio de 2018, com intuito de aperfeiçoar o jogo e verificar sua aplicabilidade em um cenário de alunos reais.

Durante a feira apresentamos um banner contextualizando o jogo do Geoplano ao ensino da geometria plana, com um breve referencial teórico. Além disso, o banner continha a composição e as regras do jogo, de modo a despertar o interesse dos presentes na feira pelo jogo apresentado.

Cada participante da feira que chegava ao nosso *stand* recebia informações gerais sobre o jogo e era convidado a jogar, formando grupos de 2 a 3 jogadores por conjunto do jogo.

As cartas com as missões eram selecionadas conforme o nível de escolaridade dos jogadores e eram auxiliados pelos autores deste trabalho como se estivessem em uma sala de aula.

Durante o desenrolar dos jogos surgiam dúvidas a respeito de conceitos geométricos que eram primeiramente discutidas entre os próprios alunos. Nessas oportunidades os apresentadores fomentavam a discussão de modo a fixar o conteúdo matemático ali posto. Por vezes, as dúvidas precisavam ser sanadas, ocorrendo, assim, um novo aprendizado.

Os alunos de ensino médio foram os que mais demonstraram interesse no jogo. Notamos que para muitos o Geoplano era uma novidade, fazendo com que o jogo se tornasse uma curiosidade, enquanto que os alunos que já o conheciam ficaram surpresos em descobrir como um material didático apenas visto no laboratório de matemática poderia se transformar em um jogo. Ao verificar as cartas de missão os alunos demonstraram entusiasmo, uma vez que naquele momento puderam colocar em prática seus conhecimentos que só haviam sido debatidos em sala de aula.

Entretanto, houve também alunos que desistiram do jogo por se acharem incapazes de resolver os problemas apresentados pelo jogo. Estes são os exemplos de bloqueios descritos por Borin (2016), uma vez que os jogos podem ser utilizados como ferramentas para diminuir esse bloqueio criado pelo aluno.

5. Considerações Finais

O relato de experiência consiste em verificar como o jogo pode ser um facilitador no ensino da matemática. Verificamos que durante a feira o jogo teve uma boa aceitação sendo muito positiva por parte dos participantes da feira. Muitos alunos que jogaram a primeira vez voltaram para jogar novamente. Alguns trazendo, ainda, novos colegas para experimentarem o jogo.

Consideramos que os objetivos de apresentação do jogo na feira era verificar a aplicabilidade do jogo e estes foram alcançados, pois sua aplicação mostrou que é possível um jogo educativo despertar o interesse dos alunos, de forma que os alunos busquem o jogo ao invés dele ser imposto pelo professor apenas como uma ferramenta de ensino.

Verificamos também que para que este jogo seja mais proveitoso no âmbito educacional

é necessário dividir as cartas de missão não com relação ao grau de dificuldade, mas sim pelo ano de ensino. Importante para aumentar a efetividade do jogo é antes da sua aplicação fazer uma revisão sobre os conceitos da Geometria Plana e suas aplicações com o intuito de facilitar o entendimento no momento do jogo.

De maneira geral os objetivos colocados para exposição do jogo na feira foram alcançados e resultaram em questões que serão aproveitadas para melhoria do jogo e da sua aplicação.

6. Referências

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília. MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, CNE, 2017.

GANDRO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese. Doutorado. Universidade de Campinas. Campinas: Unicamp, 2000.

GROENWALD, C. L. O; TIMM U. T. **Utilizando Curiosidades e Jogos Matemáticos em Sala de Aula.** Disponível em: http://www.pedagogia.com.br/artigos/jogoscuriosidades/index.php?pagina=0. Acesso em: <01/06/2018>.

LEONTIEV, A. N. Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. In: Vigotski et al., **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem** (pp.119-142). São Paulo: Ícone, 1988.

_____. Ludicidade e atividades lúdicas: uma abordagem a partir da experiência interna, p. 22-60. In: **Educação e Ludicidade**, Ensaios 02; ludicidade o que é mesmo isso?, publicado pelo GEPEL, FACED/UFBA, 2002.

MACEDO, L. *Os jogos e sua importância na escola.* In: Macedo, L., Petty, A. L. S. e

Passos, N.C., **Quatro cores, senha e dominó**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2003.

MICHAELIS. **Dicionário on-line**. Melhoramentos. Disponível em http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/jogo/. Acessado em <01/06/2018>.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, Tizuko Morchida (Org.) **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14ª Ed. São Paulo: Cortez, 2011. P. 81-97.

ONU. UNICEF. **Declaração Universal dos Direitos das Crianças**. 1959. Disponível em: < http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/declaracao_universal_direitos_crianca.pdf>. Acessado em: <01/06/2018>.

ORTIZ, J. P. In: Múrcia, J.A.M. (e col.). **Aprendizagem através do jogo**. Porto Alegre: Editora Artmed, 2005.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a Matemática: números e operações**. Curitiba: Ed. Aymará, 2009.

NÚMERO DE EULER

Théo Borém Fabris, Arthur Gonçalves Diesel, Bruno Paiva Sant'Anna, Antônio Victor Machado de Oliveira, Gabriel Cosme Barbosa, João Victor Fernandes Picoli, Ramon Araújo Santana

theo.fabris@gmail.com

Resumo: O número de Euler vem sendo estudado desde o século XVII, inicialmente com os trabalhos de John Napier, depois Jacob Bernoulli e Leonhard Euler. Buscamos explorar as mais diversas aplicações do número de Euler, desde a derivada, abordando o conceito de derivada e funções exponenciais, funções hiperbólicas, com o foco na formulação da equação da catenária, e representação de números complexos, utilizando de series para demonstrar a fórmula de Euler.

Palavras Chaves: Número de Euler, Funções Hiperbólicas, Logaritmo Neperiano, Cálculo, Juros Compostos.

1. Surgimento Histórico do Número de Euler

O número apareceu pela primeira vez, implicitamente, nos trabalhos de John Napier sobre logaritmos em 1618, em uma de suas tabelas de logaritmos. Nesta tabela foram calculados os logaritmos de diversos números para a base e, mas ele não foi reconhecido como base destes logaritmos.

Entretanto a primeira definição explícita no número de Euler surge a partir dos estudos de juros compostos de Jacob Bernoulli em 1683. Nestes estudos, surge o limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Para resolvê-lo Bernoulli usa o teorema binomial e mostra que este limite está entre dois e três, desta forma pode considerar que essa foi a primeira aproximação para o número de Euler.

Além destes trabalhos, também houve estudos nos quais relacionavam logaritmos neperianos, que tem como base o número de Euler, com a área de uma hipérbole. No início do século XVII, o estudo de áreas era muito comum e o matemático Pierre de Fermat conseguiu provar que a área abaixo da curva das funções do tipo $y = x^n$ são dadas pela seguinte equação: $\frac{(x^{n+1})}{n+1}$ .A prova de Fermat, porém, não contemplava a função $y = \frac{1}{x}$. Coube ao jesuíta Saint-Vicent provar que, nesse caso, a área é igual ao logaritmo natural

de x. Em 1748 Leonhard Euler publica em seu livro Introductio in Analysin infinitorum outra forma de encontrar o valor do número de Euler:

$$e - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}$$

Através desta fórmula ele calcula seu valor com dezoito casas decimais de aproximação.

2. Derivada

Uma propriedade interessante do número de Euler é a derivada da função f(x) $= e^x$. Antes que se entre nesse quesito, é importante aprofundar-se um pouco no conceito de derivada. A derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto $x = x_0$, é igual ao valor da tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$, portanto, o coeficiente angular da reta tangente ao ponto do gráfico $x = x_0$. A derivada consiste, portanto, na taxa de variação de uma função.

Para a função f(x) $= e^x$, pode-se calcular a derivada considerando dois valores de x muito próximos de modo que Δx é aproximadamente zero ($\Delta x = h$). Para calcular a derivada de e^x, inicialmente, se calcula a derivada de uma função exponencial com uma base b, sendo b uma constante qualquer:

$$\frac{d[b^x]}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{b^{x+h} - b^x}{h} \right)$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{b^{x+h} - b^x}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{b^x * b^h - b^x}{h} \right) = \lim_{h \to 0} b^x * \left(\frac{b^h - 1}{h} \right)$$

Visto que b^x é uma constante em relação a h, então o limite h tendendo a zero de $\frac{b^h-1}{h}$ é um dos limites fundamentais (igual a $\ln b$), como pode ser conferido no livro[12], o qual será demonstrado abaixo têm-se:

$$\lim_{h\to 0} b^x * \lim_{h\to 0}\left(\frac{b^h - 1}{h}\right) = b^x * \ln b$$

Substituindo b por e, obtém-se que a derivada de $f(x) = e^x$, que é igual a e^x. Portanto, a taxa de variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor.

2.1 Demonstração do limite fundamental:

Desejamos mostrar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Seja t pertencente aos reais tal que:

$$t = a^x - 1 \therefore\ a^x = t + 1$$

Se x tende a zero, t também tende a zero, já que a^x tenderá a um. Calculando Logaritmo Neperiano em ambos os membros teremos:

$$a^x = t + 1 \to\ \ln a^x = \ln(t+1) \to x * \ln a = \ln(t+1) \to x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}$$

Substituindo x pela expressão encontrada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a * \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} \to \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}$$

[1]Friedli, Sasha; **Cálculo 1**; Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~sacha/textos/Calculo/Apostila_2015_02_26.pdf

$$\ln a * \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} \to \ln a * \frac{\lim_{t\to 0} 1}{\lim_{t\to 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

Fazendo uso da propriedade do logaritmo do limite:

$$\ln a * \frac{\lim_{t\to 0} 1}{\lim_{t\to 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \ln a * \frac{1}{\ln \lim_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

O termo no logaritmo natural do denominador corresponde ao próprio número de Euler,

.

$$\ln a * \frac{1}{\ln e} = \ln a * \frac{1}{1} = \ln a$$

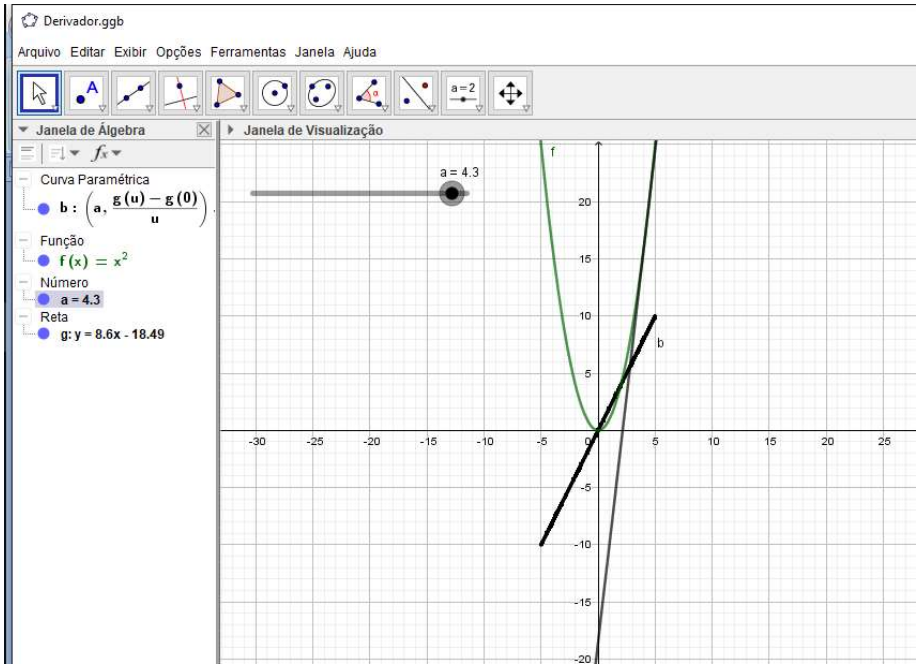
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Na função $f(x)$= e^x, "a", do limite mencionado acima, corresponde ao número de Euler, fazendo com que a derivada dessa expressão seja e^x.

3. Geogebra

Para elucidar o tópico abordado e mostrar a derivada de algumas funções, durante a apresentação na VII Semat, utilizamos o software Geogebra, e foi definida a seguinte sequência de comandos para que o Geogebra traçasse a derivada da função definida:

Figura 7: Derivada da função quadrática

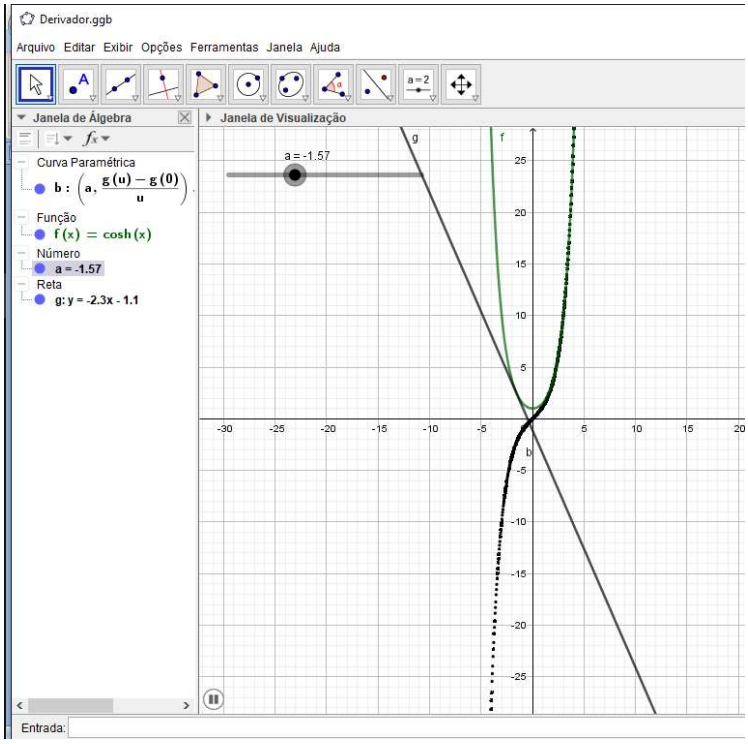


Fonte: Os autores.

- Definir a função $f(x)$;
- Criar um controle deslizante "a";
- Usar o comando tangente para encontrar a reta tangente à curva em um ponto: g = Tangente (a, f), onde g é a função da reta tangente à função $f(x)$e "a" é o controle deslizante previamente definido;
- Para achar a derivada, calculamos o coeficiente angular da reta tangente e vinculamos o valor ao ponto b, que deve ser criado com as seguintes coordenadas $(a, (\frac{g(x)-g(0)}{x})$ e ativamos o rastro deste ponto.

Deste modo, à medida que o controle deslizante varia altera as coordenadas do ponto p, desenhando a função derivada da função $f(x)$, no intervalo do controle deslizante.

Figura 2: Derivada da função cosseno hiperbólico



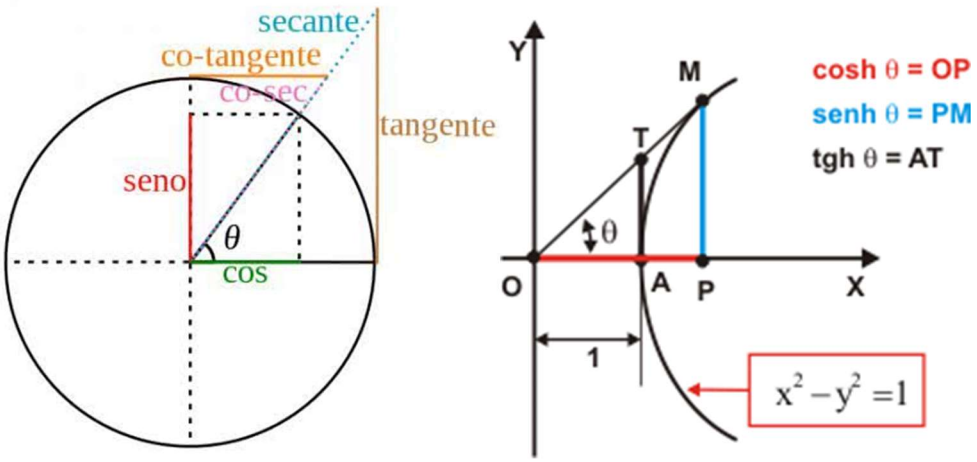
Fonte: Os autores.

Como modelo representativo do funcionamento, utilizou-se como função f(x) a função quadrática (figura 1) e a função cosseno hiperbólico (figura 2).

4. FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

O número de Euler também é usado para definir as funções hiperbólicas, funções que são aplicadas em diversas áreas da matemática, bem como na física. Exemplos dessas funções, são o seno hiperbólico ($senh$), cosseno hiperbólico ($cosh$), tangente hiperbólica ($tanh$), podendo-se perceber uma clara relação, a princípio com relação aos nomes, entre essas funções e as funções trigonométricas. Essas funções recebem esses nomes, porque possuem as mesmas relações com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. O cosseno hiperbólico do ângulo formado entre o eixo horizontal e o segmento de reta que liga um ponto qualquer da hipérbole à origem, é a projeção desta mesma reta no eixo das abscissas e o seno hiperbólico do mesmo ângulo é a projeção no eixo das ordenadas do mesmo segmento de reta, e a tangente a razão entre o seno e cosseno. Outra relação importante com a hipérbole é a identidade trigonométrica hiperbólica:

Figura 3: Círculo trigonométrico e hipérbole



Fonte: Os autores.

$\cosh(x)^2 - \text{senh}(x)^2 = 1$ (identidade trigonométrica hiperbólica)

$x^2 - y^2 = 1$ (lei de formação de uma hipérbole)

$\cos(x)^2 + \text{sen}(x)^2 = 1$ (identidade trigonométrica pitagórica)

$x^2 - y^2 = 1$ (lei de formação de um círculo)

Sendo assim estabelecida essa relação, tem-se as definições de cada função:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)}$$

O gráfico dessas funções pode ser esboçado pensando que à medida que se aumenta o valor de x, a função e^{-x} tende a zero. Desse modo $senh(x)$ e $\cosh(x)$ se aproximam de $\frac{e^x}{2}$. Do mesmo modo, diminuindo-se os valores de x, os valores de e^x tendem a zero, $\cosh(x)$ se aproxima de $\frac{e^{-x}}{2}$ e senh(x) se aproxima de $\frac{-e^{-x}}{2}$. Para esboçar $tanh(x)$ basta pensar que por ser uma razão entre o $senh(x)$ e o $\cosh(x)$, e que para valores positivos de x são muito próximos a $tanh(x)$ tenderá a um, e para valores negativos, como

$senh(x)$e $\cosh(x)$ têm valores aproximadamente simétricos, a $tanh(x)$tenderá a menos um.

Um modo como as funções hiperbólicas se manifestam na física é a catenária (fio suspenso, homogêneo, estacionário, não rígido, não enrolado e com comprimento maior que a distância entre os pontos de apoio), que é descrita como um co-seno hiperbólico e é de extrema importância para o estudo de linhas de transmissão. O modelo matemático seria $f(x) = k * \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k$, onde k é uma constante relacionada com o comprimento do fio e a distância entre os dois pontos pelo qual ele está suspenso, e b representa a distância do ponto mais próximo ao chão. A grande importância da previsão desse modelo é o cálculo do valor da capacitância que surge quando há uma diferença de potencial entre o chão e o fio suspenso. De acordo com a fórmula, $c = \varepsilon * \frac{A}{d}$, onde c é a capacitância gerada, ε é a permissividade elétrica do meio, A é a área de cada superfície capaz de armazenar carga e d é a distância da separação entre elas, à medida que a distância entre o ponto mínimo da catenária e o chão diminui, a capacitância aumenta, e de acordo com a fórmula $Zc = \frac{-i}{2\pi fc}$, onde Zc é a impedância do capacitor e f é a frequência da rede, a impedância do capacitor diminui. Com isso, como o capacitor está em paralelo com a carga (casa, indústria etc.), conforme sua impedância diminui, há uma diminuição na impedância equivalente, que causa uma redução na tensão entregue à carga. Isso pode ser corrigido substituindo o material de composição do fio de cobre por alumínio com alma de aço para assim, reduzir o peso do material [13].

5. Fórmula de Euler

Outra aplicação importantíssima é a fórmula de Euler, que é uma fórmula matemática que estabelece uma relação fundamental entre funções trigonométricas e funções complexas exponenciais, sendo de grande importância em muitas áreas da matemática. A fórmula estabelece que para qualquer número real x:

$e^{(i*x)} = i\sin(x) + \cos(x)$, onde "e" é o número de Euler e i é a unidade imaginária.

5.1 Demonstração da fórmula de Euler

[2] Oliveira, Carlos Cesar, **Introdução a Sistemas Elétricos de Potência**, Blucher

Usando a série de Taylor para $e^{(ix)}$:

$$e^{(i*x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i*x)^n}{n!} = 1 + (i*x) + \frac{(i*x)^2}{2!} + \frac{(i*x)^3}{3!} + \ldots$$

Como: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 * i = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, . . ., obtemos:

$$e^{ix} = 1 + (i*x) + \frac{(i*x)^2}{2!} + \frac{(i*x)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + i - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

Sendo que a série de Taylor para a função seno e cosseno é:

$$sen(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Assim:

$$e^{(i*x)} = i\sin(x) + \cos(x)$$

A partir da fórmula de Euler se obtém a identidade de Euler (figura 4), que é dita como a mais bela identidade matemática, pois representa etapas cruciais da história da matemática: a aritmética (“1”), invenção do zero (“0”), a geometria (“π”), a álgebra (“i” introduzido para resolução de equações) e a análise (“e”, base dos logaritmos neperianos).

Figura 4: Identidade de Euler

$$e^{i\pi}+1=0$$

Fonte: Os autores.

6. Conclusão

O trabalho elaborado evidenciou a vasta aplicabilidade do número de Euler nos mais diversos ramos da matemática, assim como justificou a atenção dada a este número por

inúmeras pesquisas no setor acadêmico inclusive das mais privilegiadas instituições. Ainda com algumas propriedades pouco exploradas, o número ainda tem seu mistério, porém a análise aqui feita provou-se frutífera para os integrantes do grupo, assim como, possivelmente, para os leitores, servindo para clarear muito daquilo que não é abordado em sala de aula nos ensinos médio e fundamental.

7. Referências

FREITAS, Maria do Bom Conselho da Silva Beserra; **As funções hiperbólicas e suas aplicações**.

O'CONNOR, J. J. e ROBERTSON, E. F. **The number e**; MacTutor History of Mathematics; Disponível em:

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/e.html>; Acesso em 09 de setembro de 2018.

STRANG, Gilbert; **Calculus**; Wellesley-Cambridge.

STEWART, James; **Cálculo 2**; Cengage Learning.

TIPLER, Paul; **Física para cientistas e engenheiros, Eletricidade, Magnetismo e Ótica**; Volume 2; Editora LTC.

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

CONSIDERAÇÕES SOBRE UM CURSO DE CÁLCULO II MINISTRADO EM QUATRO SEMANAS

Guilherme Barbosa de Almeida, Ellen Kênia Fraga Coelho

guibarbosa.almeida@gmail.com

Resumo: Apresentaremos um relato de experiência de lecionar um curso de Cálculo II com carga horária de 90 horas em quatro semanas no campus Cachoeiro de Itapemirim, bem como as análises referentes à assimilação de linguagem matemática em um curto espaço de tempo, à autonomia dos alunos e à inclusão desses no processo de ensino/aprendizagem. O curso foi ministrado nos meses de janeiro e fevereiro de 2018. Os alunos contaram com dois professores que se revezaram entre os turnos nos dias de aula. O curso foi ofertado para todos os alunos do campus, mas todos matriculados já tinham cursado a disciplina pelo menos uma vez. As aulas se concentraram em três dias da semana, de terça à quinta, sendo oito horas de aula por dia, duas delas dedicadas à resolução de exercícios pelos alunos com atendimento individualizado. Ao final do curso, os alunos fizeram uma avaliação qualitativa do processo de ensino/aprendizagem por meio de um questionário em um formulário eletrônico. Os desafios encontrados no curso foram os mesmos que já existem nos cursos regulares – alunos com algum déficit de aprendizagem e/ou com compreensões equivocadas de tópicos relacionados aos níveis de ensino anteriores e a falta de tempo disponível para dedicação extraclasse – somados ao agravante de tratar-se de um curso de curta duração. A análise dos questionários e das avaliações feitas pelos alunos demonstrou a dificuldade de assimilação de novas linguagens em um curto espaço de tempo. Alunos que já tinham forte domínio das linguagens associadas aos conteúdos obtiveram um melhor desempenho ao longo da disciplina. Por outro lado, alunos com dificuldades associadas ao domínio da linguagem não obtiveram êxito no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. No que diz respeito à postura dos alunos em relação ao curso, pudemos observar que o (in)sucesso na disciplina esteve diretamente ligado à autonomia e ao tempo de dedicação extraclasse. Em um curso de curta duração esses dois fatores mostraram-se preponderantes. Por último, percebemos que como proposta educacional o curso contribuiu para que alguns alunos avançassem nas grades de seus cursos, mas, ao mesmo tempo, acabou reforçando a cultura excludente do ensino de Cálculo nas instituições de ensino superior.

Palavras Chaves: Educação superior. Curso de cálculo de curta duração. Cálculo diferencial e integral II.

1. Introdução

O objetivo desse artigo é apresentar o relato e a análise de um curso de cálculo II que ministramos durante um período de quatro semanas para uma turma mista de engenharias,

sistemas de informação e licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (IFES). Buscaremos mostrar como foi desenvolvido o curso e analisar, no contexto de um curso de cálculo de curta duração, a influência da autonomia dos estudantes no sucesso escolar, se houve assimilação de novas linguagens e se o curso contribuiu para reforçar a (ex) inclusão de estudantes no processo de ensino aprendizagem.

Entenderemos a autonomia do estudante como sua capacidade de buscar o conhecimento independente das mediações feitas em sala de aula. A assimilação de novas linguagens será entendida como a habilidade do aluno compreender os símbolos e códigos associados aos conteúdos e utilizá-los para expressar conhecimentos matemáticos. A inclusão será considerada em um sentido mais amplo, um estudante será considerado incluído no processo de ensino aprendizagem se suas necessidades de aprendizagem forem contempladas durante o curso. Nesse sentido, entendemos que a evasão e o baixo rendimento são consequências imediatas da não inclusão dos estudantes.

O que motivou a redação desse artigo foi nosso desejo de compartilhar a experiência de lecionar um curso que é visto como desafiador pelos educandos em um período de tempo tão curto. Além disso, desejamos contribuir cientificamente com o tema apresentando resultados e análises sobre o processo de ensino aprendizagem.

Inicialmente, apresentaremos referenciais teóricos, no contexto de ensino aprendizagem, sobre autonomia de estudantes, assimilação de linguagem matemática e inclusão (no sentido descrito anteriormente). Posteriormente, apresentaremos como o curso foi desenvolvido e, por último, apresentaremos resultados e análises de natureza qualitativa baseados em nossas percepções em sala de aula e nas respostas de um questionário de avaliação do curso respondido pelos alunos.

2. Referencial Teórico

2.1 Sobre a assimilação de linguagem matemática

Os referenciais pesquisados apontam que a relação entre a assimilação de linguagens matemáticas e aprendizagem de ideias matemáticas é tão estreita que se confundem. As palavras de Malta (2004, p. 44) confirmam a importância do desenvolvimento da linguagem matemática:

> [...] sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos (e, portanto extremamente dependentes da linguagem

> que os constrói) nos seus diversos níveis, não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático (também em seus diversos níveis).

Esta convicção vai ao encontro das ideias de Vygotsky sobre o papel constitutivo da linguagem que contraria a ideia de independência entre pensamento e linguagem (MALTA, 2004).

Nesse sentido, entendemos que a não dissociação da assimilação de linguagem matemática e aprendizado em matemática caracteriza o processo de ensino aprendizagem em matemática como um processo de apropriação de linguagem. Portanto, é um processo que demanda tempo e pode ser prejudicado em cursos de duração muito curta.

2.2 Sobre a autonomia

A autonomia dos estudantes se mostra um fator preponderante no processo de ensino aprendizagem. Vários autores citam a falta de autonomia como um dos fatores que contribuem para o fracasso escolar dos estudantes em cursos superiores.

Estão entre as finalidades do ensino médio, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a preparação do estudante para o seu prosseguimento em estudos posteriores (BRASIL, 1996). Porém, o não desenvolvimento dessas competências causa um desequilíbrio entre o que se espera dos estudantes ao ingressarem no ensino superior e o que eles realmente desenvolveram, principalmente no que tange à autonomia.

Esta constatação pode ser confirmada por Soares e Sauer (2004, p. 263):

> [...] podem ser elencadas algumas variáveis que parecem interferir no processo de aprendizagem: falta do costume do aluno em estudar sozinho e em gerenciar sua aprendizagem; dificuldades em: localizar ou identificar suas dúvidas e dificuldades e desenvolver um processo capaz de superá-las.

Com base no exposto, entendemos que autonomia é um fator importante que pode determinar o sucesso ou insucesso escolar dos estudantes, principalmente em cursos de curta duração.

2.3 Sobre a inclusão

Muitos alunos chegam ao ensino superior com dificuldades em conteúdos do ensino básico e despreparados para a rotina de estudos no ensino superior. Estas estão entre as causas da não inclusão de alunos no processo de ensino aprendizagem, conforme Barreto (1995, p. 4, apud REIS, 2001, p. 21):

> As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com

> pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros.

Porém, decerto, estas não são as únicas causas. Inclui-se a isto, as metodologias dos cursos e o que são ensinados neles. Menestrina e Goudard (2003) mostram que há uma contradição entre os conteúdos das disciplinas de matemática do ciclo básico e a aplicabilidade e contextualização delas em disciplinas profissionalizantes dos cursos de Engenharia. Acrescenta-se, então, que o modo como os cursos são estruturados colaboram para os níveis elevados de reprovação nas disciplinas de Cálculo.

Diante do exposto, entendemos o desafio da inclusão de estudantes em disciplinas de matemática do ensino superior envolvem questões que remetem ao aluno, ao professor e às estruturas curriculares dos cursos oferecidos.

3. Relatando a Experiência

3.1 A criação do curso

As disciplinas de Cálculo I, Cálculo II e Geometria Analítica fazem parte da grade curricular dos cursos de Engenharia de Minas, Engenharia Mecânica, Sistemas de Informação e Licenciatura em Matemática do IFES, campus Cachoeiro de Itapemirim. Essas disciplinas têm na instituição altos índices de reprovação. Percebemos que as reprovações, quando se repetem, desestimulam os estudantes no prosseguimento dos estudos.

Em janeiro de 2018, o IFES, campus Cachoeiro de Itapemirim, tinha à disposição cinco professores de matemática recém contratados ou empossados. Isto, somado aos altos índices de reprovação, motivou alunos e um dos coordenadores a pleitear a oferta dessas disciplinas no período de férias à direção de ensino do campus. Após algumas reuniões com os professores e uma consulta aos alunos, ficou acertado que essas disciplinas seriam ofertadas de 09 de janeiro a 06 de fevereiro do ano de 2018. Entendemos que o curso seria um desafio para os alunos e os professores, mas que seria uma oportunidade para que os alunos avançassem nas grades curriculares de seus cursos. Para evitar uma carga horária excessiva de aulas para os professores, ficou acordado que as disciplinas de Cálculo I e Cálculo II contariam com dois docentes que se revezariam durante os turnos. Dessa forma, fomos contemplados com a disciplina de Cálculo II que foi ministrada nessas quatro semanas.

3.2 O desenvolvimento do curso

As aulas ocorreram de terça a quinta, com 8 horas de aula por dia, sendo que 6 horas eram expositivas e 2 horas destinadas a sanar dúvidas dos alunos. Assim, totalizaram-se 96 horas de aula nas 4 semanas de curso, 6 horas a mais do que as 90 horas regulamentares da disciplina de Cálculo II. A distribuição das aulas de terça a quinta teve o intuito de o estudante evitar deslocamentos para o campus em todos os dias da semana. Vale ressaltar que o campus de Cachoeiro de Itapemirim está localizado em uma rodovia e a oferta de transporte público é reduzida nos meses de janeiro. Dessa forma, o estudante teria quatro dias seguidos (de sexta-feira à segunda-feira) sem aulas para dedicação extraclasse.

A disciplina de Cálculo II tem ementas diferentes nos quatro cursos do campus de que ela faz parte. Como o curso foi aberto para todos os estudantes, a ementa no nosso curso deveria contemplar pelo menos 75% das ementas de Cálculo II dos quatro cursos. Essa condição foi necessária para que o curso pudesse ser aproveitado pelos alunos em seus respectivos cursos. O resultado disso, foi uma ementa ainda mais extensa do que as ementas originais de cada um dos cursos. A disciplina oferecida contou com os seguintes tópicos: coordenadas polares, sequências e séries, séries de potências, limite e continuidade de funções de várias variáveis, regra da cadeia para função de várias variáveis, derivadas parciais, máximos e mínimos, integrais duplas, integrais triplas, integrais duplas em coordenadas polares, campos de vetores, integrais de linha e teorema fundamental do cálculo para integrais de linha.

A distribuição de pontos foi feita da seguinte maneira: uma prova de 40 pontos a cada duas semanas de aula totalizando 80 pontos de prova nas quatro semanas do curso e 20 pontos de listas de exercícios.

A disciplina teve matrícula de 22 alunos. Todos os alunos matriculados já tinham sido reprovados na disciplina pelo menos uma vez. Isto mostra que o curso teve adesão de um público disposto a abrir mão do período de férias para compensar uma reprovação no período regular do curso.

No primeiro dia de curso, no início da primeira hora de aula, apresentamos, juntamente com a direção de ensino, o plano de ensino e explicamos como seria a logística do curso. Pontuamos para os alunos o quão desafiador seria o curso e que o comprometimento e a dedicação extraclasse seriam fundamentais para eles lograrem êxito no processo de ensino aprendizagem.

Na primeira semana do curso tivemos a evasão de quatro alunos. Esses se justificaram dizendo que a ementa do curso ofertado era mais extensa e complexa que ementa de cálculo II de seus cursos de origem.

Passadas duas semanas, aplicamos a primeira prova e recebemos a primeira lista de exercícios. O aproveitamento dos alunos que fizeram a prova foi, em média, de 16,25%, sendo que apenas um deles teve aproveitamento acima de 60%. Após o resultado da primeira prova, houve mais cinco evasões.

No final da quarta semana aplicamos a segunda prova e recebemos a segunda lista de exercícios. O aproveitamento médio dos alunos nessa prova foi de 56,25%. O exame final (avaliação de recuperação) foi feito por 6 alunos uma semana após o fechamento das notas. Esses tiveram em média, aproveitamento de 25,9%. Ao final do curso, tivemos seis alunos aprovados.

4. Análises e Conclusões

Após o término do curso, os alunos foram convidados a responder um questionário de avaliação que teve o intuito de auxiliar na análise sobre a autonomia, a assimilação de linguagens matemáticas e a inclusão. Dos 22 alunos matriculados, 20 responderam ao questionário (90,9% da turma). Os itens do questionário estão enumerados abaixo:

I) Escreva de maneira sucinta o(s) motivo(s) de você ter abandonado o curso, caso tenha sido o seu caso.

II) Você entende que o tempo de duração do curso atendeu às suas necessidades individuais de aprendizagem? Justifique.

III) Com relação às exposições feitas pelos professores, assinale o seu grau de compreensão do conteúdo durante as aulas: nenhum, baixo, médio; alto.

IV) Qual foi o seu maior desafio durante o curso?

V) Em média, quantas horas semanais extraclasse você se dedicou ao curso incluindo o tempo para fazer listas de exercícios? Assinale a alternativa que contempla sua resposta: de 0 a 5 horas; de 6 a 12 horas; de 12 a 18 horas; mais de 18 horas.

VI) Você fez consultas e/ou leituras e/ou pesquisas sobre o conteúdo no livro didático, internet ou outras fontes? Assinale a alternativa que contempla sua resposta: nenhuma vez; algumas vezes; muitas vezes.

VII) Quantas vezes, durante o curso, você tirou dúvidas individualmente com o professor? Assinale a alternativa que contempla sua resposta: nenhuma vez; de uma a três vezes; de quatro a seis vezes; mais de seis vezes.

VIII) Para cada um dos temas abaixo assinale o seu grau de conhecimento prévio (nenhum; baixo; médio; alto) antes da realização do curso: coordenadas polares, sequências e séries, séries de Taylor, limite e continuidade de funções de várias variáveis, integrais duplas, integrais triplas, integrais duplas em coordenadas polares, integrais de linha e teorema fundamental do cálculo para integrais de linha.

Os itens de I a IV tiveram o intuito de coletar informações sobre a inclusão dos alunos no processo de ensino aprendizagem, isto é, se o curso, atendeu as necessidades de aprendizagem dos educandos. Os itens de V a VII tiveram a função de auxiliar na análise sobre a autonomia dos alunos durante o curso e o item VIII teve objetivo de nos ajudar na análise sobre assimilação novas linguagens.

Os quatro alunos que desistiram do curso na primeira semana justificaram na resposta ao item I que a ementa seguida era bem mais extensa e aprofundada do que a de seus cursos origem. Para o item II, 70% dos alunos responderam que o curso não atendeu suas necessidades de aprendizagem e mencionaram o tempo de duração do curso ou a quantidade de conteúdo em suas justificativas. No item III, 80% dos estudantes responderam que o grau de compreensão das aulas expositivas foi médio ou alto e o restante respondeu que foi baixo. Além disso, todos os alunos mencionaram o tempo de duração do curso, a quantidade extensa de conteúdo ou a falta de tempo para estudar como maior desafio no curso. Percebemos que o tempo de duração do curso somado à quantidade excessiva de conteúdos foram fatores que contribuíram para não inclusão de estudantes no processo de ensino aprendizagem. Além disso, as respostas do item III, em conjunto com os diálogos realizados com os alunos durante o curso, demonstraram que a crítica com relação à nossa atuação nas exposições e processos avaliativos foi bem pequena. Os resultados reforçam a ideia de que a inclusão está associada a múltiplos fatores, que muitas vezes envolvem questões estruturais do curso como o tempo de duração e a quantidade de conteúdos nas ementas. Concluímos que esses dois últimos fatores acabaram reforçando a exclusão para a maior parte dos alunos.

Analisando as respostas dos itens IV, V e VI, notamos que todos os 6 aprovados no curso se dedicaram mais de 18 horas semanalmente aos estudos individuais, consultaram muitas vezes outras mediações de aprendizagem e procuraram os professores para sanar dúvidas mais de seis vezes. Apesar disso, percebemos pelas respostas ao questionário, que dois alunos que também se dedicaram igualmente, não alcançaram um desempenho satisfatório no curso. Analisando as listas de exercícios e provas desses dois alunos, verificamos uma defasagem muito grande em conteúdos de níveis de ensino anteriores,

tais como fatoração de polinômios, produtos notáveis, expressões algébricas e resolução de equações. Concluímos que a autonomia mostrou-se um fator preponderante para o sucesso dos alunos na disciplina. Porém, outros fatores, como defasagem em conteúdo em níveis de ensino anteriores influenciaram negativamente no desempenho dos estudantes. Estas conclusões corroboram com as ideias de autores citados na introdução desse texto.

Destacamos nas respostas do item VIII que 19 dos 20 alunos que responderam ao questionário (95%) tinham baixo ou nenhum conhecimento nos conteúdos de sequências e séries, séries de Taylor e integrais de linha. Analisando os resultados das questões desses conteúdos nas provas, verificamos que o aproveitamento da turma foi, em média, menor do que 10%. Percebemos, então, que o aprendizado nesses temas foi muito pequeno até mesmo entre os alunos aprovados. Uma análise das avaliações demonstra que alguns alunos sequer compreenderam ou deram sentido matemático aos códigos e símbolos envolvidos nesses conteúdos. Ressaltamos que tais temas possuem uma simbologia carregada e nova para os alunos de cálculo II. Pudemos inferir que o tempo curto do curso não possibilitou a assimilação de linguagens associadas a esses conteúdos, o que prejudicou o aprendizado desses temas. Essas conclusões vão ao encontro das ideias de Malta (2004) de que a aprendizagem em matemática é um processo de apropriação de linguagem e, por isso, demanda tempo.

5. Referências

BICUDO, Maria Aparecida V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BIANCHINI, B. L., CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.) **Marcas da educação matemática no ensino superior.** Campinas/SP: Papirus. 2013. 367p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

FRIGOTTO, Gaudêncio. A Relação da Educação Profissional e Tecnológica com a Universalização da Educação Básica. **Educação e Sociedade**. vol. 28, n. 100, 2007. p. 1129-1152.

MALTA, Iaci. **Linguagem, Leitura e Matemática**. In: CURY, Helena N. (Org.). Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 41-62.

MENESTRINA, Tania Comiotto; GOUDARD, Beatriz**. Atualização e revisão pedagógica de Cálculo e Álgebra**: concepções e atitudes inovadoras. In: 31º CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 2003, Rio de Janeiro. Anais do 31º COBENGE. Rio de Janeiro: ABENGE, 2003, p. 1-11.

REIS, F. da S. A **Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

SOARES, E. M. S.; SAUER, L. Z. **Um novo olhar sobre a aprendizagem de matemática para a engenharia**. In: CURY, H. N. (Org.). Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 245-270.

CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INDÍGENA A PARTIR DE CONTEÚDOS VISUALIZADOS NA ARQUITETURA GUARANI

Kevila Cezario de Morais, Caio Angelo da Silva, Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni, Ligia Arantes Sad

kevila.morais@gmail.com

Resumo: O presente trabalho é parte de um projeto de iniciação científica desenvolvido no Instituto Federal Do Espírito Santo, campus Vitória e trata de um relato de experiência que tem o objetivo de analisar como as atividades extraclasses auxiliam o processo de aprendizagem escolar indígena. Apontamos categorias de conteúdos matemáticos visualizados em construções arquitetônicas guarani a partir do olhar de um professor não indígena e sinalizamos possíveis conexões com o estudo da matemática no contexto indígena. Esta pesquisa se apoia na Constituição 88 – LDB 9394/96 que, em seu artigo 79 trata do provimento da educação intercultural às comunidades indígenas por meio do desenvolvimento de currículos específicos com conteúdos culturais relativos às respectivas comunidades. Com base na etnopesquisa crítica, o método usado foi a pesquisa de campo (visita técnica) na Escola Municipal Pluridocente Indígena (EMPI) Três Palmeiras e nas aldeias guarani de Três Palmeiras e Boa Esperança, localizadas no município de Aracruz - ES. Tratando-se de aspectos matemáticos percebidos por professores não indígenas, durante a realização de uma oficina com eles, tivemos a oportunidade de ver a relação dos alunos indígenas com tais ideias, como elas são vistas e compreendidas por eles, a partir das referências da cultura guarani, e da mesma maneira, pudemos ver como esses conceitos matemáticos e atividades extraclasses podem contribuir com a educação indígena.

Palavras Chaves: Etnomatemática. Construções indígenas. Geometria. Projeto arquitetônico.

1. Introdução

Este trabalho trata de um relato de experiência com base na etnopesquisa crítica. O cenário da pesquisa constituiu-se em três espaços: nas aldeias guarani de Três Palmeiras e Boa Esperança, onde conversamos e entrevistamos os moradores, fotografamos algumas residências e construções como a Casa de Reza (*Opy*, em língua guarani), e na Escola Municipal Pluridocente Indígena (EMPI) Três Palmeiras, onde tivemos como atores os alunos do Ensino Fundamental, um professor de Matemática e o diretor da escola.

O presente relato de experiência que tem o objetivo de analisar como as atividades extraclasses auxiliam o processo de aprendizagem escolar indígena, apontando categorias

de conteúdos matemáticos visualizados em construções arquitetônicas guarani a partir do olhar de um professor não indígena.

O ensino fundamental, segundo os PCN (BRASIL, 1998), tem o objetivo de fazer com que os alunos sejam capazes de: compreender a cidadania como participação social e política; posicionar-se de maneira crítica e desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética e estética; entre outros. Quanto ao papel do professor de matemática, os PCNs orientam que é de fundamental importância ser capaz de identificar as principais características dessa ciência e de seus métodos, conhecer a história de vida dos alunos e ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática.

A licenciatura oferece muitas oportunidades para conhecermos e nos relacionarmos com o ensino básico, este trabalho, por exemplo, é parte de um projeto de iniciação científica, iniciada em 2017 e coordenada por Claudia A. C. Araújo Lorenzoni e Lígia A. Sad. A pesquisa é desenvolvida no Instituto Federal do Espírito Santo, e investiga ideias matemáticas para a educação escolar indígena a partir de saberes tradicionais desses povos no Espírito Santo.

A partir das experiências vivenciadas em grupo, como leitura de textos, visita às aldeias Guarani no estado do Espírito Santo, e conversas com os próprios indígenas sentimos a necessidade de estudar e conhecer esse povo, sua cultura, religião e estrutura social. Em consequência destes estudos, realizamos essa experiência com o objetivo de analisar como as atividades extraclasses auxiliam o processo de aprendizagem escolar indígena. Esta pesquisa se apoia na Constituição 88 – LDB 9394/96 que, em seu artigo 79 trata do provimento da educação intercultural às comunidades indígenas por meio do desenvolvimento de currículos específicos com conteúdos culturais relativos às respectivas comunidades.

Temos a intenção de produzir uma feira de matemática dentro da escola guarani, com exposição de fotos, proposição de construção da maquete de uma residência e discussão com os alunos do ensino fundamental sobre as formas geométricas percebidas nas construções.

2. Povos Indígenas: Um Olhar da Etnomatemática

2.1 Contexto histórico-cultural

A educação escolar indígena e a não indígena possuem, cada uma, suas particularidades, o que não representa um ponto negativo. Muitos elementos abordados na educação indígena envolvem, por exemplo, aspectos culturais, que são indispensáveis na sua educação, mas que não se encaixariam e não seriam abordados da mesma forma na educação de diferentes sociedades. Os aspectos culturais de uma sociedade podem influenciar muito no modo como aquele povo vê e compreende certos assuntos e, dessa forma, esse povo terá ideias e interpretações diferentes acerca de assuntos tratados na educação escolar, como por exemplo, ideias matemáticas.

Com a chegada dos europeus ao Brasil, iniciou-se um intenso contato entre os portugueses e os povos que aqui viviam. Este contato nem sempre foi amigável e quase sempre os europeus foram os dominadores e os indígenas os dominados. Os indígenas foram alvo de dominação, imposição cultural e religiosa, e ao longo dos anos, com a sua resistência, também foram massacrados e tiveram sua população reduzida. Até hoje a história é ensinada do ponto de vista do europeu, do dominador, e a ideia que se tem é que os índios são povos derrotados, fadados ao desaparecimento. Como consta no livro de Teao e Loureiro,

> "... persiste a concepção sobre os povos autóctones como sujeitos passivos dos inúmeros massacres, extermínios e genocídios causados pela invasão portuguesa, a partir do século XVI, e os poucos sobreviventes condenados ao desaparecimento (...)" (TEAO; LOUREIRO, 2009, p.21).

Esses aspectos históricos, com o índio sempre mostrado como inferior, como subjugado, além da atual resistência dos índios e luta pelos seus direitos, contribuem para criar, de acordo com Teao e Loureiro,

> "uma visão estreita, preconceituosa e discriminatória, que desconsidera preceitos históricos básicos e que negligencia o contato longínquo e recente estabelecido entre os índios e a sociedade nacional." (TEAO, LOUREIRO, 2009, p.22).

Os indígenas, durante muito tempo, foram explorados na história de nosso país e, atualmente, grande parte da população tem uma visão equivocada a seu respeito. Como todos os povos, os indígenas possuem sua história, seus costumes e sua cultura. Apesar de toda a dominação por parte dos portugueses, de todas as dificuldades que passaram ao longo dos anos, eles mantém cultura e conhecimentos próprios.

De acordo com Teao e Loureiro, “No Espírito Santo, os povos indígenas situam-se no município de Aracruz, litoral norte do Estado. Os índios aldeados são 2880, sendo 2579 Tupinikim e 301 Guarani.” (TEAO, LOUREIRO, 2009, p.29).

Conhecer os indígenas do Estado é ter acesso a uma porção de cultura riquíssima que compõe a identidade e história do Espírito Santo. Neste artigo, propomos uma aproximação da cultura guarani por meio de sua arquitetura no contexto da educação matemática.

2.2 Contexto da Etnomatemática

Cada cultura constrói maneiras próprias de saber e fazer segundo suas necessidades e seu contexto natural e social, inclusive no que se refere a conceitos matemáticos como comparar, medir, contar e simbolizar. O emprego de saberes das construções guarani na educação escolar matemática mostra uma possibilidade de desenvolver e explorar habilidades relacionadas com a disciplina de maneira contextualizada.

Para D’Ambrósio (2002, p.17), o que motiva pesquisas em etnomatemática é “procurar entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade contextualizado em diferentes grupos de interesse”. Dessa maneira, é possível identificar sua influência nos comportamentos atuais.

Concordamos com Lorenzoni (2010) ao dizer que o Programa Etnomatemática coloca em questão a existência de uma linguagem matemática. Isso pode ser discutido a partir de uma comparação entre as concepções de saberes com professores indígenas e não indígenas por exemplo. Além disso, Lorenzoni afirma que

> “A diversidade contribui na definição da própria identidade. Conhecer outras culturas contribui na formação da nossa própria visão e concepção de mundo. Em especial, no que diz respeito à matemática, o conhecimento de outras culturas e de outras formas de pensar nos permite construir uma visão mais ampla e, ao mesmo tempo, mais profunda do que se considera e do que possa ser considerado matemática. As ideias que possuímos de ciência, de matemática, entre outras, podem nos limitar e nos impedir de alcançar outras dimensões ou possibilidades de ciência. O contato com o novo ou com o diferente permite romper ou ampliar (pre)conceitos promovendo uma construção constante da identidade ante a alteridade.”(LORENZONI, 2010, P. 70)

Assim, podemos dizer que se faz necessário criar uma relação entre o que se aprende de matemática na escola e a sociedade em que se vive. Segundo Matthews (2008, p.48), a

matemática começa a partir das observações de uma realidade. O observador escolhe uma parte da realidade e, em seguida, cria uma representação abstrata usando símbolos matemáticos que reunidos para formam linguagem simbólica que chamamos matemática.

Por isso, torna-se interessante investigar, numa perspectiva etnomatemática, saberes tradicionais dos Guarani, quanto às suas habitações, com o propósito de buscar possíveis relações desses saberes com a educação escolar indígena.

Cada tipo de construção está relacionado aos preceitos culturais dos Guarani e ao processo histórico que a comunidade esteve inserida. Deve-se levar em consideração também os recursos naturais presentes no local, os aspectos sociais, ambientais, econômicos, religiosos e climáticos relacionados a cada tipo de construção guarani, na tentativa de aperfeiçoar e otimizar ao máximo o uso de recursos naturais locais. Além disso,

> "No que tange a sua arquitetura, a cultura guarani contém narrativas mitológicas proferidas pelos ancestrais que se referem a utilização de determinadas espécies vegetais nas edificações, advindas do mito da criação do mundo, que originalmente foi sustentado por árvores cósmicas primordiais ofertadas aos Mbyá para a construção de suas casas." (CARRINHO, 2010, p.68)

A partir dessas leituras, decidimos investigar saberes e fazeres em arquitetura dos Guarani por meio de conceitos para matemática escolar, buscando na escola um espaço de discussão conceitual.

3. Construções Guarani no Espírito Santo

Para estudar construções guarani no Estado, realizamos uma visita técnica no dia 30 de outubro de 2017 à Aldeia Boa Esperança e à Aldeia Três Palmeiras. As aldeias estão localizadas no Km 44 da ES 010 - Caieiras Velha II, Aracruz – ES, e são território dos indígenas Guarani Mbya. Acompanhados do diretor da escola indígena do local, Mauro, visitamos habitações tradicionais que fazem parte das aldeias. Fotografamos, conversamos com alguns moradores sobre a história de suas casas, dos aspectos estruturais, técnicas de construção e também sobre a finalidade de cada espaço e os aspectos culturais envolvidos. Posteriormente, voltamos às aldeias realizando outras observações e conversas informais.

Neste dia, visitamos também a aldeia temática destinada especialmente à recepção de turistas. Fomos recebidos por Rodrigo, que nos deu uma explicação de como são

construídas determinadas moradias e quais são os procedimentos e materiais utilizados. A figura 1 mostra a estrutura de uma cabana em uma de suas etapas de construção.

Figura 8: Estrutura de cabana.

Fonte: Os autores.

O número de peças de madeiras utilizadas está relacionado com a quantidade de pessoas que irão habitar essa casa. Esta, por exemplo, é para uma família de cinco pessoas, de acordo com o indígena que nos acompanhou na visita à aldeia temática.

Em relação à construção ele relatou:

> "Sempre que a gente vai fazer uma casa, a gente levanta o meio, que é o centro, ai já do meio, a gente já tira as outras peças, para já jogar em volta... a gente não usava esse negocio de metro, media com uma madeira fina... mas o centro tem uma fundura de um metro e meio. Aí botava o mesmo metro do meio em volta. Sempre colocava depois as madeiras no canto (horizontalmente) em volta de tudo, até lá em cima, para que a palha não caísse por dentro... pra não molhar lá dentro. A palha começa do pé, e vai colocando uma em cima da outra até chegar lá no final, e lá no final a gente faz a amarração." (Índio guarani, 2018)

Nessa construção são evidentes dois aspectos matemáticos, a base da construção é circular, e a casa em si tem formato cônico, duas características que são encontradas em muitas construções indígenas ao redor do mundo.

Na visita pudemos ver como é a construção das paredes de forma geral. Não só na aldeia temática como nas outras aldeias, paredes como a da figura 2 são utilizadas em basicamente todas as construções, como veremos mais adiante. Na figura 2, foto feita na entrada da aldeia temática, podemos ver que as paredes possuem colunas principais.

Figura 2: Parede construída na aldeia temática.

Fonte: Os autores.

Algumas construções identificadas nas aldeias possuem vigas principais de madeira mais grossa que sustentam a parte superior da parede quando se tratam de construções maiores. Mesmo após a finalização da construção, ainda é possível ver essas colunas e vigas principais, pois o barro colocado não as cobre completamente. Podemos ver que são colocadas diversas colunas finas dispostas com mesmo espaçamento pelo interior da parede. Sobre essas colunas são colocadas diversas peças de madeira horizontais também dispostas com mesmo espaçamento entre si.

Quanto ao espaçamento e as medidas, o construtor guarani segue uma maneira própria de padronização. Utiliza partes do corpo como base para as medições ou alguma madeira ou objeto com dimensões consideradas adequadas. Após a preparação da estrutura das paredes, começa o processo de se colocar o barro.

Colocar o barro sobre as paredes é uma atividade que envolve várias pessoas. Normalmente, o barro é retirado nas proximidades do local onde será feita a casa. Na figura 3 podemos ver o local de onde foi retirado o barro para a construção de uma casa.

Figura 3: Local de retirada do barro.

a

Fonte: Os autores.

O barro cobre totalmente a parte interna feita de madeira da parede, deixando descobertas apenas pequenas partes das vigas e colunas principais, como podemos ver na figura 4. Ainda na figura 4, podemos observar duas colorações de barro.

Figura 4: Diferentes tipos de barro utilizados.

Fonte: Os autores.

A cor escura indica que o barro foi retirado primeiro do solo, e o barro mais claro é o que foi retirado depois, ou seja, estava mais fundo no solo. Na concepção dos guarani, a diferença de cor não compromete a qualidade do barro. Com a finalidade de aumentar a resistência do revestimento, alguns construtores optam por adicionar capim ao barro antes de colocá-lo na parede.

Uma construção de grande importância para os Guarani é a Casa de Reza (figura 5), local onde são realizados os rituais religiosos. No seu interior é possível encontrar alguns assentos e instrumentos musicais.

Figura 5: Casa de Reza.

Fonte: Os autores.

Essa construção tem uma relação interessante com o Sol. Sua parte frontal, onde os indígenas rezam, deve ser virada para o Sol nascente. Nas fotos, retiradas pela manhã, podemos ver que a parte da frente é aquela que está iluminada pelo Sol.

A Casa de Reza costuma ser mais alta que as habitações, provavelmente por ser um local em cujo interior se faz fogo por mais tempo, além de receber pessoas de diferentes estaturas. Numa habitação convencional, a altura da construção costuma ser determinada pela estatura dos moradores.

Como dito anteriormente, construções maiores possuem vigas horizontais principais mais grossas para sustentar o peso da parede. Na Casa de Reza podemos ver essas vigas localizadas aproximadamente no meio das paredes e outra acima da porta, para sustentar o peso da parede e do teto.

A figura 6 mostra uma casa com formato octogonal, construída como solução paliativa enquanto outra casa duplex, que demoraria mais tempo, ia sendo construída. Os Guarani costumam dizer que essa casa é redonda, devido ao número de lados serem maiores que das tradicionais. O conteúdo que nós, não indígenas, observamos nela são as formas poligonais, por exemplo: na janela a representação do retângulo; na vista lateral do telhado um trapézio; na vista frontal do telhado um triângulo isósceles; na estrutura do telhado um triângulo retângulo; e a casa com formato octogonal.

Figura 6: Casa com formato octogonal.

Fonte: Os autores.

Na figura 7 podemos ver outra construção que visualizamos na aldeia. Estruturalmente, esta casa é igual a Casa de Reza, porém, com dimensões menores. Normalmente as construções indígenas são feitas com base nas pessoas que irão habita-las, a da figura 7, por exemplo, foi toda construída com base na altura da indígena que aí mora. É possível observar as colunas principais na junção entre as paredes; as vigas principais são feitas de madeira menos grossa, já que se trata de uma construção menor e menos pesada, dessa forma, elas só são visíveis no interior da casa. A indígena que habita essa construção afirma querer construir uma de Casa de Reza de 7 por 4 (passos ou metros). Assim como a outra Casa de Reza maior, ela deseja colocá-la de frente para o Sol. Essa indígena afirmou que

> "É importante... as crianças não querem saber mais, é importante e tem que puxar (a religião) de novo." (Indígena guarani, 2018).

Figura 7: Casa de moradora indígena.

Fonte: Os Autores

A visita durou aproximadamente 6 horas e agregou familiaridade ao assunto que estava sendo tratado, já que foi a primeira vez que sentimos de perto o modo de vida em uma aldeia. Os moradores foram gentis, e abriram literalmente as portas para a equipe de pesquisa.

4. Arquitetura Guarani e Educação Matemática

O planejamento das aulas na escola guarani procura ser feito com base em sua própria cultura e organização social, e promovendo a criatividade, o conhecimento e a valorização das tradições referentes à comunidade em que vivem. Esta é apoiada pela Constituição 88 – LDB 9394/96 que em seu Artigo 79, trata do provimento da educação intercultural às comunidades indígenas quando define como objetivo "desenvolver currículos e programas específicos, neles incluindo os conteúdos culturais correspondentes às respectivas comunidades". Este tipo de pedagogia permite que os alunos aprendam matemática relacionando-a com sua realidade, moldando e modelando o ensino.

Uma construção arquitetônica não requer o estudo especificamente de tópicos de matemática. No entanto, na investigação dos saberes tradicionais dos Guarani do Espírito Santo, quanto às suas habitações, como professores de matemática admitimos a existência de formas matemáticas que sustentam grande parte do trabalho que acontece no setor de construção. Desde a locação da construção até a determinação de quantidades e custos, da determinação das proporções do espaço ao material de pedidos, há uma grande quantidade de aritmética e geometria nessa prática.

Os seguintes tópicos apresentados são exemplos de conteúdo matemático que encontramos, como professores (não indígenas) em estudos sobre as construções dos Guarani do Espírito Santo, conforme a situação encontrada:

Conteúdo	Situação
Medidas	Unidade de medida: braços abertos, palmo, pedaço de madeira, altura do telhado.
Polígonos	Janela: retângulo, vista lateral do telhado: trapézio, vista frontal do telhado: triângulo

	isósceles, estrutura do telhado: triângulo retângulo, casa com formato octogonal.
Sólidos geométricos	Casa com formato representando prismas/cone e telhados com formato de um cone/pirâmide, tronco de pirâmide.
Perspectivas	Registro e analise em desenhos e fotos.
Relações entre retas e entre planos	Paredes e telhados.
Semi-esfera	Buraco no chão, obtido na extração do barro.
Circunferência e elipse	Vistas de cabanas na aldeia temática.
Ângulos	Inclinações das armações das paredes e dos telhados.

Tratando-se de aspectos matemáticos percebidos por não indígenas, tivemos a oportunidade de ver a relação dos professores indígenas guarani e tupiniquim com tais ideias, como elas são vistas e compreendidas por eles a partir de uma oficina realizada na escola. Revelamos as fotos feitas na visita técnica e entregamos a eles para que nos trouxessem referências da cultura guarani, e da mesma maneira, pudéssemos identificar como esses conceitos matemáticos podem contribuir com a educação indígena.

Na figura 8, podemos ver um professor com a foto impressa da construção anotando características, materiais utilizados na construção e métodos construtivos, além de observações e comparações matemáticas.

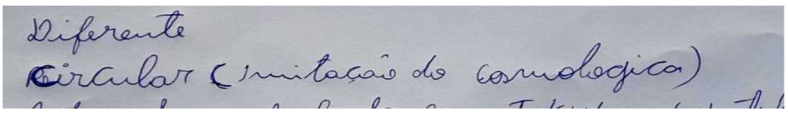
Figura 8: Professor indígena na oficina.

Fonte: Os autores.

Alguns professores registraram comentários usando a língua guarani, e apresentaram em português. Isso aconteceu porque tinham a liberdade para escolherem a língua a utilizar, já que durante as aulas, na maioria das vezes, o diálogo é feito na língua tradicional deles.

Professores guarani compararam a casa octogonal a um círculo (figura 9), mostrando a tradição, dizendo que era uma imitação cosmológica, e diferente das demais casas, pois, tradicionalmente as casas dever ter quatro paredes, duas a duas paralelas entre si.

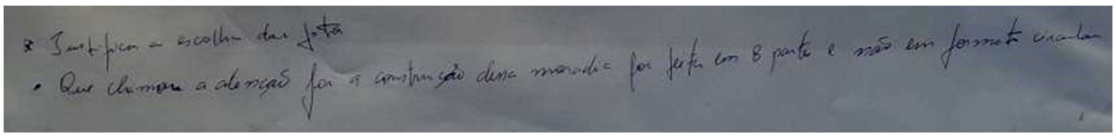
Figura 9: Descrição da casa octogonal.



Fonte: Os autores.

No caso da figura 10, podemos notar que o professor tupinikim responsável pela disciplina de matemática destaca que o formato da casa representa um octógono, e não um círculo, quando diz: “Que chamou atenção foi a construção dessa moradia feita em oito partes e não em formato circular.”

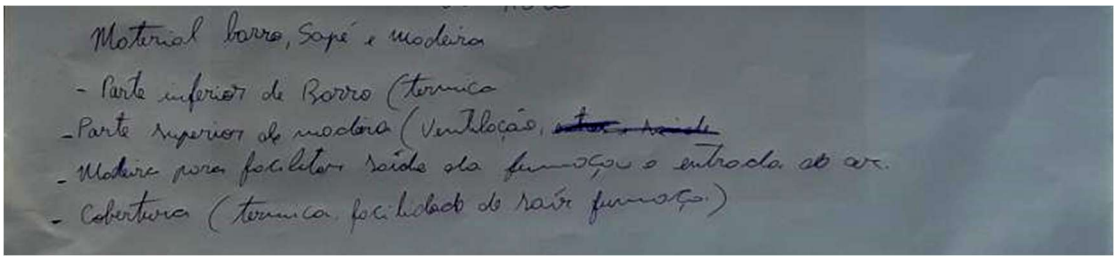
Figura 10: Outra descrição da casa octogonal.



Fonte: Os autores.

Alguns professores apenas descreveram os materiais utilizados na construção e suas funções, como escrito na figura 11: “Parte inferior de barro (térmica); parte superior de madeira (ventilação); cobertura (térmica, facilidade de sair fumaça)”.

Figura 11: Descrição dos materiais.



Fonte: Os autores.

Depois de terem sentado em dupla, escolhido a foto e anotados as informações, montamos um quadro para sintetizar e organizar as informações e ideias do grupo.

Diante da análise dos professores indígenas, promovemos um debate procurando ideias presentes na arquitetura que pudéssemos associar a matemática escolar. A discussão foi sintetizada no quadro que produzimos a seguir. Nele encontramos termos particulares do contexto como "mão de palha", para designar agrupamento de brotos de palmeira usados na cobertura de algumas construções, ou "porã", termo guarani traduzido como bom, belo ou aquilo que agrada, que faz bem.

Tabela 1: Anotações no quadro branco.

Algumas características	Possibilidades (medidas)
Temperatura	Forma (reto, circular, linha fechada, octogonal, triângulo, cone)
Estética (porã, o que agrada)	Tamanho (alto, largo, distância entre peças de madeira)
Iluminação	Quantidade do telhado (feixe, mão de palha, número de águas e paredes)
Material	Posição relativa (superior, madeiras paralelas, simetria, relativo ao sol)
Funcionalidade	Textura (madeira, palha)
Tempo (durabilidade do material)	Procedimentos (algorítimos)
Procedimento (colher material, construir)	Cor (palha: designa maturidade, barro: designa região e profundidade)

Fonte: Os autores.

A partir desse encontro de formação e das informações apresentadas pelos professores indígenas, podemos afirmar que o que nós, não indígenas, vemos de matemática nas construções vai do encontro do que eles vêm e a escola é o local desse encontro.

5. Conclusão

Tratando-se de aspectos matemáticos percebidos por professores não indígenas, tivemos a oportunidade de ver a relação deles com tais ideias e como elas são vistas e compreendidas, a partir das referências da cultura guarani. De mesma maneira, pudemos ver como esses conceitos matemáticos e atividades extraclasses podem contribuir com a educação indígena.

Esse trabalho traz a possibilidade para os professores indígenas utilizarem elementos da sua cultura na escola, especialmente com a geometria, permitindo que tenha significados mais motivadores. Da mesma maneira, nós, como professores e futuros professores, aprendemos a respeito dos elementos da cultura Guarani em suas construções e criamos possibilidades de leva-los à escola não indígena.

6. Referências

BRASIL**, Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996.**

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Ensino Fundamental; Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARRINHO, Rosana Guedes. **Habitação de interesse social em aldeias indígenas: uma abordagem sobre o ambiente construído Mbyá-Guarani no litoral de Santa Catarina** – Florianópolis, SC, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade** – Belo Horizonte: Autentica, 2002

LORENZONI, C. A. C. de Araujo. **Cestaria guarani do Espírito Santo numa perspectiva etnomatemática.** Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

MACEDO, Roberto Sidnei. **Etnopesquisa crítica, etnopesquisa-formação**. Brasília: Líber Livro, 2006.

MATTHEWS, Christopher and Cooper, Thomas J. and Baturo, Annette R. (2007) Creating your own symbols: **Beginning algebraic thinking with Indigenous students**. In Woo, Jeong-Ho and Lew, Hee-Chan and Park, Kyo-Sik and Seo, Dong-Yeop, Eds. Proceedings 31st Annual Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, pages pp. 249-256, Seoul: Korea.

TEAO, Kalna Mareto; LOUREIRO, Klítia. **História dos índios do Espírito Santo**. Vitória, 2009.

DEDUÇÃO DA FÓRMULA DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

Jéssica Alves Quintanilha, Mylane dos Santos Barreto, Janete Henrique Gomes, Daniela Dias Nogueira, Luiza Ferreira Costa, Tayná Monteiro Coelho de Freitas

jessicaalves7880@gmail.com

Resumo: O presente trabalho é resultado das atividades desenvolvidas na disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense campus Campos Centro. A carência no ensino dos conteúdos geométricos para as pessoas com deficiência visual é ainda maior do que para os alunos videntes, já que a maioria dos professores não dominam as técnicas e metodologias de ensino adequadas a esse público. Diante disso, a proposta se baseia na abordagem de um conteúdo de Geometria, dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, aplicado ao ensino de alunos com cegueira congênita ou adquirida, utilizando material manipulável. A confecção dos materiais se justifica pelo fato de os mesmos auxiliarem na construção do conhecimento dos alunos cegos, visto que o ensino de alunos com deficiência deve ser centrado nas suas potencialidades, superando as suas limitações. Com isso, trabalhou-se com o raciocínio lógico e o uso de cálculos mentais por parte do aluno, e os materiais manipuláveis colaboraram como instrumento de mediação na construção do conhecimento. Baseado no exposto, elaborou-se uma sequência didática para alunos cegos do nono ano do Ensino Fundamental II, tendo como objetivo permitir ao aluno deduzir a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Vale ressaltar que esta sequência pode ser utilizada tanto para alunos cegos quanto para videntes. Assim, preparou-se uma apostila que inicialmente apresentava alguns conteúdos que representavam pré-requisitos da sequência didática elaborada, seguia com atividades exploratórias e era finalizada com exercícios de verificação da aprendizagem. Tais exercícios não foram contextualizados, pois pretendia-se, neste ponto, que o aluno soubesse manipular a fórmula. O nível de dificuldade dos exercícios apresentava caráter progressivo, já que a sequência didática foi pensada para que o aluno ganhasse confiança e ficasse motivado durante a aplicação da mesma. Os materiais manipuláveis foram confeccionados utilizando linha encerada, papel 40 kg, miçangas, papelão e EVA (borracha não-tóxica de alta tecnologia de Etil, Vinil e Acetato), em forma de matrizes e polígonos para elucidar os conteúdos. Tais conteúdos foram discutidos para estimular o raciocínio lógico dedutivo do estudante, para que ao final do estudo, ele compreendesse o processo matemático de dedução da fórmula. Os bons resultados foram alcançados devido ao manuseio descomplicado do material manipulável, bem como, o seu baixo custo de confecção e a linguagem adequada utilizada pelas licenciandas durante toda a aplicação da sequência didática. Ao final da sequência perguntou-se à discente participante da experimentação sobre uma possível dúvida quanto ao conteúdo abordado e qual a opinião da mesma a respeito da sequência aplicada. As respostas obtidas foram que não lhe restaram dúvidas e que o conteúdo lhe foi muito bem explicado. Portanto, pode-se concluir que o objetivo, além de ser alcançado, permitiu às licenciandas terem um contato mais próximo da realidade do aluno cego, criando um ambiente de interação aluno – licenciandas, enriquecendo o trabalho.

Palavras Chaves: Geometria. Matemática Inclusiva. Material Concreto.

1. Introdução

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma das sequências didáticas elaboradas pelas licenciandas em Matemática, no Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMAT). O LEAMAT é um componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFF e se desenvolve em três semestres com quatro linhas de pesquisa, sendo estas: Álgebra, Aritmética, Educação Matemática Inclusiva e Geometria.

O trabalho apresentado trata-se especificamente da linha de pesquisa Educação Matemática Inclusiva, cuja sequência didática aborda um conteúdo da Geometria, dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, utilizando como material manipulável triângulos feitos de emborrachados e papelão, além de matrizes feitas de linhas enceradas de diversas espessuras, miçangas, papel 40kg e vários tipos de texturas em EVA (borracha não-tóxica de alta tecnologia de Etil, Vinil e Acetato, que pode ser, e é, aplicada em diversas atividades artesanais).

O objetivo foi elaborar uma sequência didática que permita ao aluno cego deduzir a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Porém, a sequência didática pode ser aplicada tanto para alunos cegos quanto para alunos videntes, sendo estes estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental II.

2. Justificativa

Segundo Canziani (1985, p.12), "A pessoa portadora de deficiência deve receber uma educação que lhe permita adaptar-se ao ambiente que a rodeia e também encontrar o caminho e os meios que lhe permitam adaptar-se às situações futuras".

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Geometria no ensino fundamental deve trabalhar os seguintes conceitos e procedimentos:

> • Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
>
> • Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.
>
> [...]

- Construção e representação de formas geométricas (BRASIL, 1997, p.51).

O ensino de alunos com deficiência deve ser centrado nas suas potencialidades e não nas suas limitações.

> A utilização de materiais manipuláveis e da fala como instrumentos de mediação no processo de construção do conhecimento de alunos cegos é fundamental no sentido que permite a busca de características do objeto de estudo por meio do sistema háptico e auditivo compensando a falta da visão (BARRETO, 2013, p. 39).

De acordo com Vieira e Silva (2007), a carência no ensino dos conteúdos geométricos para as pessoas com deficiência visual é ainda maior do que para os alunos videntes, já que além de os professores não dominarem as técnicas e metodologias de ensino adequadas a esse público, também não têm interesse em aprendê-las.

Diante disso, optou-se por elaborar uma sequência didática que permita ao aluno cego deduzir a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

3. Metodologia

3.1 Elaboração da sequência didática

A sequência didática foi elaborada com o objetivo de fazer com que o aluno, consiga deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono.

Foi elaborada uma apostila que inicialmente apresenta alguns conteúdos que representam pré-requisitos da sequência didática elaborada, assim como foram confeccionados materiais concretos utilizando linha encerada, papel 40 kg, miçangas, papelão e EVA em forma de matrizes e polígonos para elucidar os conteúdos. Tais conteúdos são discutidos para estimular o raciocínio lógico dedutivo do estudante, para que ao final do estudo, ele venha a compreender o processo matemático de dedução da fórmula.

Sendo assim, o primeiro conteúdo abordado é o conceito de ângulo, onde no decorrer da explicação o aluno receberá as matrizes para manuseio e construção do conhecimento. A compreensão deste conteúdo é fundamental para o desenvolvimento desta sequência didática, já que para o aluno deduzir a soma dos ângulos internos de um polígono é preciso entender a definição e saber identificar ângulos. Outro fator que justifica o estudo dos ângulos se deve a estratégia escolhida para deduzir a fórmula.

A apostila prossegue definindo o que é um polígono, acompanhada por imagens, confeccionada em forma de matrizes, buscando facilitar a identificação, dos polígonos convexos e não convexos. Além disso, essa definição se complementa com o estudo dos elementos dos polígonos e de como eles são representados geometricamente.

A sequência didática prossegue com a dedução da fórmula soma dos ângulos internos de um triângulo. Nesta parte, é proposta uma atividade exploratória, em que o aluno deverá seguir tanto as instruções das licenciandas quanto os comandos inseridos no texto da apostila. A primeira etapa consiste na manipulação de um triângulo feito de material concreto, este dividido em três partes.

Posteriormente, o estudante deverá desmontá-lo em três partes, cada uma contendo um dos três ângulos do triângulo. Em seguida, ele receberá uma matriz que contém uma reta r representada com linha encerada e um ponto O representado com uma miçanga. Nesta etapa o aluno deverá dispor as partes do triângulo de modo que os vértices dos ângulos coincidam com o ponto O, sendo todos eles adjacentes.

Feito isso, ele será orientado a observar que os três ângulos do triângulo se juntaram formando ângulos adjacentes cuja soma é igual a um ângulo raso.

A partir daí, a apostila abordará a dedução da soma dos ângulos internos de um polígono.

O material elaborado dará início a essa dedução utilizando como estratégia três atividades. Serão fornecidos três polígonos distintos, um deles irregular e dois deles regulares, juntamente com segmentos confeccionados de elástico todas as diagonais possíveis partindo de um vértice. Depois de finalizadas as construções, o estudante responderá perguntas da apostila sobre a quantidade de lados do polígono; o número de triângulos formados no interior do polígono pelas diagonais traçadas e a soma dos ângulos internos do polígono.

Essas atividades foram elaboradas para permitir que o aluno note a existência de um padrão. Depois que a regularidade for detectada, as licenciadas auxiliarão o educando a conjecturar, fazendo com que o mesmo seja capaz de deduzir a fórmula que determina a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Para tal dedução será considerado um polígono de n lados. Traçando todas as diagonais a partir de um dos vértices desse polígono, obtemos (n-2) triângulos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, a soma das medidas dos ângulos internos de (n-2) triângulos será: **S = (n-2) x 180º.**

A apostila é finalizada com exercícios de verificação da aprendizagem.

As questões não foram contextualizadas, pois pretende-se, neste ponto, que o aluno saiba manipular a fórmula. O nível de dificuldade dos exercícios é progressivo, pois a sequência didática foi pensada para que o aluno ganhe confiança e fique motivado.

A dificuldade da primeira questão reside na definição da palavra "hexágono", pois o aluno só conseguirá fazer o que se pede quando entender o que ela significa matematicamente, para tal será entregue ao mesmo, o polígono manipulado anteriormente. Porém, como no decorrer da aula o aluno já será induzido a classificar os polígonos a partir da quantidade de lados que o mesmo possui, espera-se que o aluno consiga resolver tal questão.

Já na segunda questão, o problema está na compreensão do processo "inverso" da fórmula. O aluno tem o valor correspondente a soma dos ângulos internos de um polígono e deverá usar essa informação para determinar a quantidade de lados do polígono em questão.

Na terceira questão, o aluno receberá uma matriz contendo um polígono regular, no qual deverá contar o número de lados e substituir na fórmula deduzida, anteriormente, para determinar a soma dos ângulos internos dos polígonos dados.

3.2 Aplicação da sequência didática

A apresentação da sequência didática de Matemática Inclusiva ocorreu no dia 16 de Outubro de 2017, das 15 h 20 min às 16 h 10 min, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos - Centro. A sequência didática seria aplicada para um aluno com cegueira adquirida que tinha dificuldade com a leitura Braille e facilidade com a realização de cálculos mentais, assim a sequência didática foi adaptada para tal aluno, sem informações em Braille no material manipulável. Porém, o aluno estava indisponível no momento da aplicação e para não perder os prazos da disciplina LEAMAT, a sequência didática foi aplicada para uma aluna, com cegueira congênita, do curso de Licenciatura em Geografia que tinha facilidade com a leitura Braille e dificuldade com a realização de cálculos mentais. A aluna questionou a falta de informações em Braille no material manipulável e da calculadora para realização dos cálculos, mas com a ajuda das professoras em formação as dificuldades foram sanadas.

Ângulos foi o primeiro conteúdo a ser abordado, para que a aluna compreendesse e acompanhasse o que estava sendo dito, foi entregue a ela, matrizes que abordavam o conceito de ângulo reto, agudo, obtuso e raso. Nesse momento, ela foi orientada pela licencianda a comparar o tamanho desses ângulos, pontuando a diferença entre as medidas envolvidas. Além disso, por meio dessas matrizes, foram apresentados e explorados outros elementos característicos de ângulos, a saber, vértices e semirretas.

Prosseguindo com a apostila, definimos o que eram polígonos utilizando três matrizes com representações variadas de polígonos. Neste momento, a aluna foi convidada a explorá-las e acompanhar a aula por esse material, seguindo os direcionamentos das licenciandas.

Essas matrizes permitiram o esclarecimento do conceito de polígonos convexos e não convexos, a exploração dos vértices e identificação do número de lados pela aluna, preparando-a para as próximas atividades. Ainda que durante a explicação ela tenha se mantido silenciosa, as licenciandas tiveram o cuidado de estimulá-la a exteriorizar as dúvidas que pudessem decorrer a respeito do que estava sendo explicado. No entanto, a aluna demonstrou tranquilidade e segurança quanto aos assuntos tratados.

Dando sequência a apostila, para a abordagem da página 2, foi entregue a aluna novas matrizes a serem manuseadas. Já introduzido o conceito de polígonos, os próximos itens estudados referiam-se aos elementos que o compõem, entre eles estão: vértices, ângulos internos e diagonal.

A primeira matriz referente à página 2 tratava dos elementos do polígono. Ao ser entregue a aluna, as licenciandas disponibilizaram tempo para que ela a explorasse sozinha, em seguida, a aluna fez uma segunda exploração do material guiada por uma licencianda, dessa forma, foi possível explicar a relação entre a quantidade de ângulos e de lados com a nomenclatura dos polígonos.

A matriz subsequente foi explicada pela mesma licencianda, que seguiu o mesmo procedimento, ou seja, permitiu que a aluna tateasse o material e depois propôs uma segunda exploração. Nessa matriz, a diagonal do polígono foi evidenciada. Pode-se dizer que a aluna não teve dificuldade na compreensão desse conteúdo, inclusive, ela permaneceu receptiva e não houve confusão quanto à troca das matrizes.

As licenciandas disponibilizaram bastante tempo para a exploração do material e, sempre que possível, perguntavam se ela estava entendendo a matéria. A resposta era sempre

positiva. Durante a explicação, pudemos perceber que a aluna fazia a leitura de todos os itens em Braille e, inclusive nos atentou a alguns erros de ortografia advindas da transcrição para o Braille. Percebemos também que a aluna para fazer a contagem dos lados ou dos vértices, mantinha como referência um dos vértices e a partir dele fazia as contagens. O mesmo ocorreu durante toda a sequência.

Avançando a apostila para a página 3, introduzimos o assunto que se atém à soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Inicialmente foi entregue a discente um triângulo escaleno dividido em três partes, cada parte com um dos ângulos destacados com texturas distintas. Imediatamente, foi solicitado que a aluna explorasse o triângulo e localizasse os ângulos destacados. Ela atendeu tal solicitação fazendo o reconhecimento devagar, no tempo dela. Na ocasião, uma licencianda perguntou se ela havia reparado alguma relação quanto aos ângulos, ao responder ficou claro que ela não havia notado que os três ângulos tinham medidas distintas, logo, foi necessário que uma licencianda intervisse e observasse que todos os ângulos destacados possuíam medidas desiguais entre si.

Dando continuidade, foi pedido que a educanda desmontasse o triângulo e observasse que cada parte destacada continha um dos ângulos. Prosseguindo com a aplicação, foi entregue a discente uma matriz destacando uma reta r que continha o vértice O. Com os pedaços do triângulo em mãos e a matriz descrita, foi pedido a aluna que encaixasse cada parte do triângulo sobre a reta r de modo que todos ficassem adjacentes e tivessem vértice coincidindo com o ponto O.

Observou-se que a aluna teve dificuldades tanto na identificação dos ângulos como para arrumá-los no vértice. Foi preciso que as licenciandas interferissem para que a atividade pudesse ser realizada. Depois que ela uniu todos os pedaços como orientado, foi perguntado se ela conseguia dizer que ângulo era aquele, no entanto, ele não soube responder que era o ângulo raso. Imediatamente uma licencianda retornou à matriz que tratava ângulo raso para que ela fizesse a conexão.

Seguindo com o material, a página 4 da apostila tratava de atividades que exigiam que a aluna soubesse que a soma das medias dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º, assim como, o conceito de diagonal, lado e vértices consecutivos.

Para a realização da atividade, a aluna precisou explorar três polígonos distintos, cada polígono explorado individualmente. Para todos eles o protocolo de análise era

semelhante, ela teve que identificar o número de lados, traçar todas as diagonais a partir de um vértice, e dizer quantos triângulos eram formados no interior do polígono após o traçado das diagonais.

O estudo da diagonal foi o mais complicado, a explicação precisou ser bastante minuciosa e detalhada para que a aluna pudesse fazer o processo corretamente. Durante a explicação, foi necessário que houvesse ênfase nos vértices consecutivos, frisando que eles formavam lados e não diagonais.

A aluna seguia o padrão de escolher um vértice de cada polígono para tomar como referência e a partir dele traçar todas as diagonais possíveis, para tal, foram entregues elásticos que caracterizavam esse elemento. Sempre que as diagonais eram traçadas, as licenciandas pediam que a aluna checasse que os ângulos dos triângulos formados coincidiam com os ângulos do polígono.

Seguindo a atividade, foi pedido que a aluna contasse o número de triângulos formados e a partir disso definisse a soma das medidas dos ângulos internos do polígono assim como, explicasse qual linha de raciocínio estaria sendo utilizada. Obviamente que a aluna estava sendo induzida de forma que ela pudesse concluir que é possível determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono a partir da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos formados pelas diagonais.

Para que a aluna chegasse à conclusão descrita acima, foi necessário que ela recorresse a conteúdos anteriormente descritos na apostila. Dessa forma, as licenciandas puderam ter um retorno quanto ao que havia sido ensinado e se a explicação teria sido clara a ponto de a aluna recordar.

Na apostila, havia um espaço específico para anotar as informações dos polígonos explorados. As perguntas foram elaboradas para que a partir das respostas a aluna pudesse atingir o objetivo da sequência que era deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Durante a exploração as licenciandas reforçaram a soma dos ângulos internos de um triangulo sendo 180°, para diminuir as dificuldades até chegar à generalização.

O objetivo era que a discente entendesse que se o traçado da diagonal dividisse o polígono em dois triângulos, a soma dos ângulos internos do polígono seria 360°, 180° do primeiro triângulo formado mais 180° do segundo triângulo formado. Para que ela obtivesse as

respostas certas, as licenciandas preferiram substituir o processo multiplicativo pelo aditivo, pois a aluna tinha mais habilidade em efetuar a soma.

Prosseguindo a apostila, na atividade 2, o próximo polígono a ser explorado pela aluna foi o pentágono. A aluna estava mais confiante, assim demonstrou uma desenvoltura melhor, respondendo com mais firmeza e rapidez as perguntas já feitas. Porém, permaneceu efetuando a soma para obter o resultado.

A última atividade a ser explorada abordava o hexágono, e seguiu o mesmo parâmetro de indagação anterior. A aluna ainda mais familiarizada com o conteúdo dominou a atividade respondendo com bastante propriedade as perguntas da apostila.

Para induzir à fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, uma licencianda retomou aos polígonos anteriores com suas respectivas diagonais traçadas, solicitando que a mesma explorasse e analisasse os materiais individualmente. Esse estudo foi feito a fim de que a aluna notasse que em todos os polígonos, o número de triângulos identificados coincidia com o número de lados do polígono menos dois e que mais tarde, concluísse que o número de triângulos multiplicado por 180° determina a soma dos ângulos internos do polígono.

Para que a aluna pudesse deduzir a fórmula as licenciandas precisaram intervir com a realização dos cálculos mentais. Em todas as análises a aluna retomou aos sólidos em material concreto e foi seguindo as instruções das licenciandas para conseguir identificar o que estava sendo explicado. Diante de muitas explicações oferecidas com calma, a generalização foi feita.

A sequência didática foi finalizada com a aplicação de exercícios de verificação da aprendizagem.

Na primeira questão, a aluna apresentou dificuldades com a fórmula, precisou que esta fosse relembrada ainda que a generalização tivesse acabado de ser feita. No decorrer da atividade, nos momentos em que eram exigidos os cálculos, a aluna não se intimidou perante a dificuldade, deixou claro sua fraqueza e recorreu as licenciandas para ajudá-la.

Já na segunda questão, a aluna permaneceu com dificuldades, principalmente porque ela trabalhava o processo inverso, apresentando o valor da soma dos ângulos internos de um polígono e exigindo o número de lados do mesmo. Um auxílio vigoroso foi necessário para que o resultado fosse encontrado pela aluna.

Na terceira questão, ao receber uma matriz contendo um polígono regular, a aluna pode contar o número de lados e substituir na fórmula deduzida anteriormente, determinando a soma dos ângulos internos do polígono dado. Nessa questão não houve muita dificuldade quanto à interpretação dela, porém, os cálculos mentais precisaram ser feitos com a ajuda das licenciandas.

4. Considerações Finais

Ao final da sequência perguntamos à discente se teria alguma dúvida quanto ao conteúdo abordado e o que achou da nossa aplicação, a resposta foi que a mesma estava muito satisfeita e que o conteúdo foi muito bem explicado.

Com isso, concluímos que o objetivo, além de ser alcançado, nos permitiu ter um contato mais próximo da realidade do aluno cego, criando um ambiente de interação aluna – licenciandas, enriquecendo o nosso trabalho.

Podemos citar como pontos positivos: o manuseio descomplicado do material manipulável, bem como, o seu baixo custo de confecção; a linguagem adequada utilizada pelas licenciandas, que conduziram gradativamente a construção do conhecimento da aluna; sem contar a disponibilidade da aluna em substituir o aluno previsto para a aplicação da sequência didática.

Os pontos a serem melhorados seriam quanto à utilização de calculadora ou soroban para agilizar os cálculos e elaboração da apostila em Braille.

5. Referências

BARRETO, M. S. **Educação Inclusiva – Um estudo de caso na construção do conceito de função polinomial do 1º.grau por alunos cegos utilizando material adaptado.** 2013. 121 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, O Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2013.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CANZIANI, M. L. B. **Educação Especial:** Visão de um processo dinâmico e integrado. Curitiba: EDUCA, 1985.

VIEIRA, S. S.; SILVA F. H. S**. Flexibilizando a geometria na Educação Inclusiva dos deficientes visuais: uma proposta de atividades**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática. UNIBH, Belo Horizonte, 2007.

DISCUTINDO OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: POLIEDROS E NÃO POLIEDROS

Thaciane Jähring Schunk, Laira Lamburguini Ribeiro, Caroline da Silva Soares, Rodrigo Sena Silva

thacianeschunk@outlook.com

Resumo: O ensino de conceitos geométricos é favorecido pela visualização e a manipulação de materiais concretos. O educando, sobretudo de séries mais elementares, compreende melhor as propriedades por meio da manipulação e visualização, além disso, o uso desses materiais pode contribuir no ensino dos conceitos tornando as aulas motivadoras, interativas e atraentes. Relatamos neste artigo a respeito dos processos de construções e aplicação de uma oficina, bem como a análise dos resultados obtidos. Uma experiência em aula de Matemática, vivenciada por discentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) no contexto da disciplina de Estágio Supervisionado. Esta ação de ensino foi realizada no segundo semestre de 2017 em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino em Vitória-ES. Optamos pelo uso de materiais concretos nesta atividade envolvendo o ensino de Geometria, tendo como objetivo o ensino relacionado aos poliedros e não poliedros. Para isso, realizamos discussões sobre a importância da geometria ao longo da história da humanidade e como ela se desenvolveu até os dias de hoje, depois, os alunos, organizados em grupos, fizeram análises de sólidos geométricos, e em seguida foi realizado discussões dos resultados obtidos pelos educandos, finalizando, os alunos ficaram incumbidos de construírem sólidos geométricos e responderem uma ficha de atividades. O uso de materiais concretos e a realização de construções geométricas mostraram ser elementos que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem, despertando o interesse dos alunos, estimulando a interação social e cognitiva, bem com discussão de estratégias e possibilidades para a realização da atividade.

Palavras Chaves: Intervenção pedagógica. Educação matemática. Geometria espacial

1. Introdução

Relatamos neste artigo a respeito dos processos de construções e aplicação de uma oficina, bem como a análise dos resultados obtidos. Uma experiência em aula de Matemática, vivenciada por discentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) no contexto da disciplina de Estágio Supervisionado. Esta ação de ensino foi realizada no segundo semestre de 2017 em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino em Vitória-ES. Optamos pelo uso de materiais concretos nesta atividade envolvendo o ensino de Geometria, tendo como objetivo o ensino relacionado aos poliedros e não

poliedros, e para a introdução do assunto, recorremos à educação estética e produções humanas para motivar os alunos e terem empatia com o assunto.

O ensino de conceitos geométricos deve envolver a visualização e a manipulação de materiais concretos. Para Piaget (1977) o uso desses materiais favorece a uma aprendizagem significativa.

Para Vale (2002), se deve sempre utilizar manipuláveis no ensino de um novo conceito de matemática. Em especial, no que se refere à Geometria,

> (...) pelas suas possibilidades de concretização, sugere um ensino em que qualquer opção de estratégia utilize material manipulável [...] A ideia principal é que os conhecimentos geométricos se adquirem pelo contato e manipulação das figuras. As transformações que se vão operando no material é que levam o aluno a conhecer as propriedades de uma figura (VALE, 2002, p.31).

Ainda que o uso de materiais concretos deva ser considerado nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, Vale (2002) reforça que o foco da atividade deve ser a experiência que será vivida pelo aluno, pois, segundo essa autora, só ocorrerá aprendizagem se esta experiência for significativa, de acordo com a proposta de Piaget (1997) que citamos anteriormente.

Reforçando a importância da experiência a ser vivida, Vale (2002) afirma que:

> As imagens mentais e as ideias abstratas dos alunos são baseadas nas suas experiências. Assim os alunos que veem e manipulam vários tipos de objetos têm imagens mentais mais claras e podem representar ideias abstratas mais completamente do que aqueles cujas experiências são mais pobres (VALE, 2002, p.14).

As ideias de Vale (2002), em associação com Piaget (1977), motivaram a opção pelo uso de materiais concretos em atividades envolvendo o ensino de Geometria, em especial, tendo como objetivo o ensino relacionado aos poliedros e não poliedros.

Concordamos com Vigotski (2010) que a arte, e aqui incluímos todas as produções humanas como obra de arte, é um mecanismo que intensifica emoções e a empatia, pois "arte não é uma complementação da vida, mas decorre daquilo que no homem é superior à vida" (VIGOTSKI, 2010, p. 340). Além disto, os processos de repetição e recriação do ato criador, que embora tenha graus diferentes, se igualam em natureza. Sendo assim, todos possuem potencialidades criadoras e receptoras que são proporcionadas pelas obras de arte. Concluímos é importante considerar a educação estética neste caso,

> Isso porque a tarefa da educação estética, como de qualquer educação criadora, em todos os casos normais deve partir da existência de um alto talento da natureza humana e da hipótese da existência de grandiosas potencialidades criadoras do ser humano e, assim, dispor e orientar as suas interferências educativas de modo a desenvolver e preservar tais potencialidades. (VIGOTSKI, 2010, p. 363).

Nestes parâmetros, concordamos que "a estética parece ser subordinada a cumprir funções alheias, especialmente 'educar o conhecimento, o sentimento ou a vontade moral" (WEDEKIN, ZANELLA, 2016, p. 169), e, portanto, não podemos impor sobre ela conhecimento, sentimento e moral como objetivos. Contudo, a educação estética deve promover e mediar um sentimento estético e promover a educação de hábitos e habilidades estéticas para não equiparar à criação artística do adulto com a da criança e/ou adolescente e ainda entender o valor principal que é a criação e não o produto final.

Chisté e Schutz (2015) lembra que o procedimento de interpretação exige aprendizagem especial com habilidades específicas e que aulas de observação de quadros e leitura lenta já foram introduzidas em algumas escolas a partir do modelo de Educação Estética, justificando mais uma vez o valor da Educação Estética.

Nas seções a seguir descrevermos os processos de construções e aplicação das atividades, bem como faremos a análise dos resultados obtidos.

2. Metodologia

As atividades envolvendo os alunos do sétimo ano de uma escola da rede municipal de Vitória-ES foram realizadas durante o primeiro semestre de 2017 e ocorreram em cinco momentos.

No primeiro momento da oficina foi apresentando o tema da aula aos educandos e provocando-os a reflexão da palavra Geometria Espacial, além de comentar os conteúdos que seriam trabalhados afim de prover um norte para eles. Este momento teve por objetivo além de nortear os alunos, verificar se compreendem o que é estudado nessa área da matemática. Foram realizadas discussões sobre a importância da geometria ao longo da história da humanidade e como ela se desenvolveu até os dias de hoje, guiada por meio de uma apresentação de slides. Utilizamos imagens de produções humanas de diferentes épocas que evidenciavam a presença de conhecimentos de geometria, as Pirâmides do Egito, o sistema de cobrança de impostos Egípcios, os poliedros de Platão e a natureza, e produções indígenas – cestos, sempre dialogando com a turma sobre os primeiros conceitos de geometria adotados, desde quando essas produções existem, em que lugar

elas se encontram, quem às construíram, e se a Geometria, que definimos no início da aula, estava presente nessas produções. Depois mostramos produções mais atuais como móveis planejados e embalagens, e obras de arte como *Calmaria II* de Tarsila do Amaral.

O segundo momento foi reservado para organizar os alunos em grupos, cinco grupos, sendo três grupos com cinco pessoas e dois grupos com seis pessoas, onde foi disponibilizado para cada, um kit de sólidos geométricos constituído por poliedros e não poliedros, sendo que o conjunto de poliedros estava formado por prismas e pirâmides, e os não poliedros eram os clássicos normalmente apresentados: cilindro, esfera e cone. Incialmente, esses objetos foram apresentados para os alunos como sólidos geométricos. Cada grupo ficou incumbido de separa os objetos por alguma categorização definida por eles. Ficaram responsáveis, também, por registrar em uma folha A4 a justificativa pelo qual escolheu tal categorização.

Figura 9: Kit de sólidos geométricos.

Fonte: Os autores.

Após a classificação dos objetos geométricos pelos alunos, demos início a discussão coletiva da análise de cada grupo. Este momento compreendeu a encaminha as discussões para a construção da definição de poliedros, não poliedros, primas e pirâmides. Cabe salientar que neste momento, foi planejado, que caso fosse necessário, seria diferenciado polígono de poliedro apresentando o significado das palavras, visto que poderia ocorrer uma confusão dos significados.

Separamos este momento para provocar os alunos com a temática não poliedro. Foi mostrado alguns corpos redondos diferentes dos costumeiramente apresentados nos livros didáticos aos alunos, e foi indagado se tais objetos são ou não poliedros. Estes corpos

redondos possuem somente um lado não poligonal. Concluiu-se este momento finalizando a discussão dos corpos redondos.

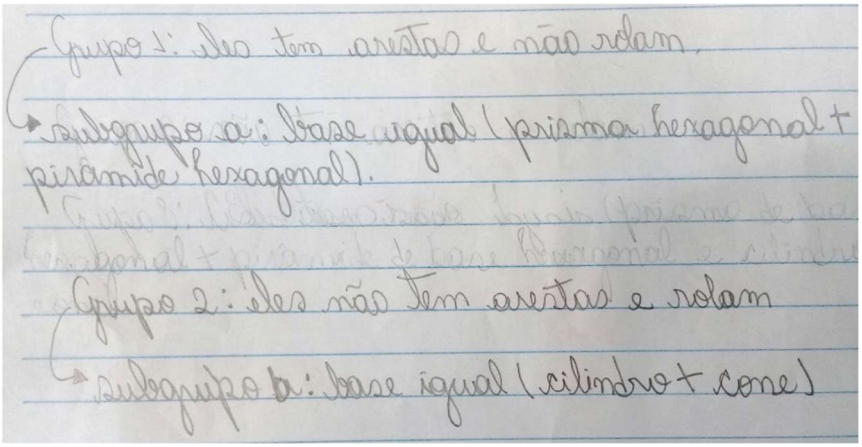
O próximo momento foi separado para discussões a respeito dos poliedros. Por meio de indagações foi discutido sobre as características dos poliedros, que compreendem as faces, arestas e vértices, e foi apresentado a nomenclatura dos poliedros consoante com os números de faces.

A oficina foi finalizada por meio de construções geométricas. Cada grupo ficou responsável por construírem duas pirâmides (base triangular e base quadricular), dois prismas (paralelepípedo e prisma com base triangular) e um não poliedro (cilindro). Foi disponibilizado para os educandos os moldes de cada sólido, dessa maneira eles ficaram responsáveis por análise o conjunto de cada grupo de moldes e tentar descobrir qual sólido geométrico é possível montar com aqueles moldes. Os poliedros foram montados com o papel cartão e borrachinha, e o não poliedro com o papel cartão e colagem das abas. Com as construções prontas, foi solicitado a realização de duas atividades. A primeira atividade consistia em analisarem os sólidos construídos e preencherem uma tabela na qual solicitava o nome do sólido, quantidade de faces, vértices e arestas. Esta análise foi realizada em grupo. A segunda atividade foi realizada individualmente, pois pedia-se que os alunos respondessem com suas palavras o que tinha compreendido por poliedro, não poliedro, prisma e pirâmide.

3. Resultados e Discussão

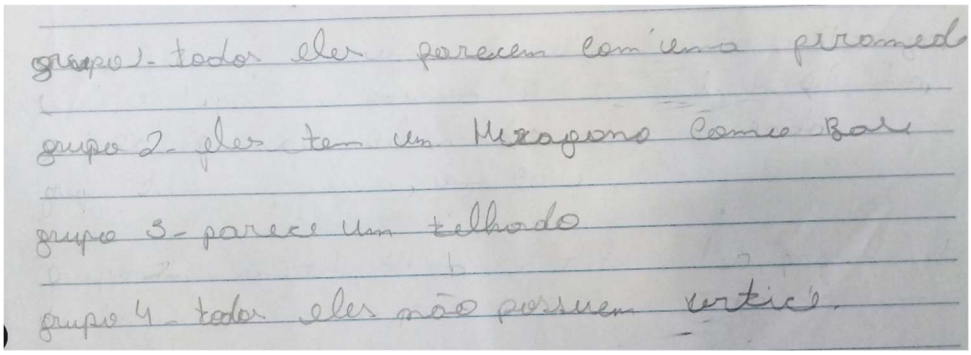
Os educandos participaram da discussão inicial e mostraram possuírem conhecimentos prévios de algumas formas geométricas. Na separação e categorização dos sólidos, verificou-se que separaram os objetivos de diferentes maneiras com distintas justificativas.

Figura 2: Resposta do grupo A.


Grupo 1: eles tem arestas e não rolam.
subgrupo a: base igual (prisma hexagonal + pirâmide hexagonal).
Grupo 2: eles não tem arestas e rolam
subgrupo b: base igual (cilindro + cone)

Fonte: Os autores.

Figura 3: Resposta do grupo B.


grupo 1 - todos eles parecem com uma piramed
grupo 2 - eles tem um Hexagono como Base
grupo 3 - parece um telhado
grupo 4 - todos eles não possuem vertice.

Fonte: Os autores.

O Grupo A separou os sólidos geométricos em dois grupos, e em cada grupo disseram ter um subgrupo. Separaram corretamente poliedros de não poliedros, na escrita utilizaram uma linguagem informal que depois foi formalizada. Nos subgrupos, afirmaram que a prisma de base hexagonal e pirâmide de base hexagonal deveriam estar no mesmo grupo por causa das suas bases iguais, e utilizaram a mesma justificativa para o subgrupo do cilindro e cone. O grupo B separou corretamente os não poliedros, e os não poliedros separou em outros grupos. Vale destaca que todos os grupos discutiram a questão da inclusão no mesmo grupo dos sólidos que possuem a mesma base. Não é nosso objetivo categorizar as respostas dos alunos em certo ou errado, mas a partir dos conhecimentos prévios dos alunos e das suas análises chegarmos, juntos, nas definições de poliedro, não poliedro, prisma e pirâmide.

Os educandos separaram os objetos rapidamente, no entanto demoraram para escreverem a justificativa por tal categorização. Observou-se que isso ocorreu pois quando paravam para

escrever sobre a categorização, refletiam, discutiam, mudavam de ideia e analisavam novamente, além de terem dificuldades com a escrita.

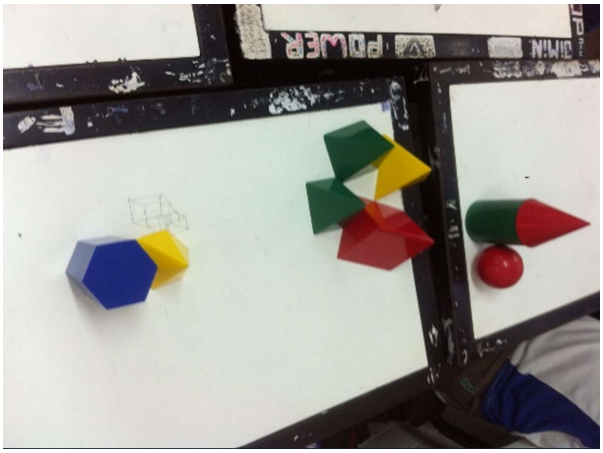
Sobre os corpos redondos com somente um lado não poligonal, os alunos confundiram com poliedro, mas diferenciamos tais objetos de poliedros, assim eles conseguiram compreender e ficaram mais atentos. E em relação as características dos poliedros, eles já compreendiam sobre as faces, vértices e arestas, no entanto não sobre a nomenclatura dos poliedros de acordo com o número de faces. Para facilitar tal nomenclatura, conciliamos como os prefixos dos nomes.

A construção dos sólidos geométricos, todos conseguiram realizar apesar das dificuldades encontradas. Como foi entregue moldes para cada grupo, por exemplo, um conjunto de molde para a construção do paralelepípedo (quatro retângulos e dois quadrados), um conjunto de moldes para a construção do prisma de base triangular (três retângulos e dois triângulos), e assim por diante para os outros objetos, verificou-se que os alunos tiveram dificuldades inicialmente em analisar os moldes e abstrair o sólido geométrico que pode ser formado. Para superar essa dificuldade, os mediadores interviam indagando se aquele conjunto de moldes formaria um poliedro ou não poliedro, e caso a resposta fosse poliedro, perguntava se formaria uma pirâmide ou um prisma, e dessa maneira os alunos refletiam e tentavam fazer as construções. Da mesma forma aconteceu caso respondessem não poliedros.

Figura 10: separação dos poliedros do grupo A

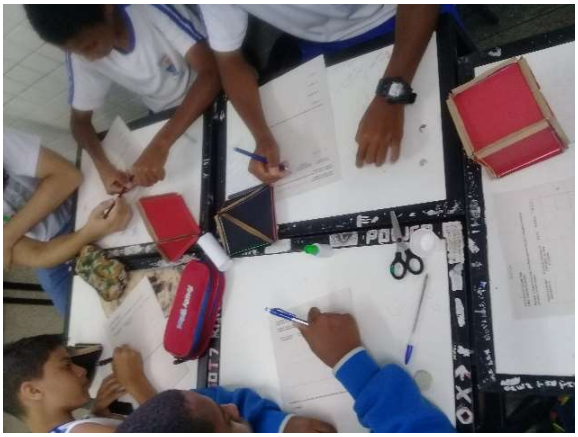
Fonte: Os autores.

Figura 11: separação dos poliedros do grupo B



Fonte: Os autores.

Figura 12: alunos realizando a atividade



Fonte: Os autores.

Figura 13: construções

Fonte: Os autores.

A respeito das atividades finais observamos que a primeira questão os alunos não obtiveram grandes dificuldades. Eles analisavam os sólidos coletivamente, discutiam e respondiam na folha. Os erros encontrados na folha de atividade estavam com a diferença de ou mais um ou menos um vértice ou aresta ou face, que acreditamos ter ocorrido por falta de atenção. Na segunda atividade verificamos um pouco de dificuldade, ao responde sobre o que era poliedro, não poliedro, prisma e pirâmide eles paravam para pensar e alguns alunos analisavam os sólidos novamente para poderem escrever. Analisando suas respostas verificamos que todas apresentam informações relevantes sobre os objetos geométricos, mas poucas foram às respostas completas.

4. Considerações Finais

Os materiais manipuláveis mostraram ser um elemento a ser considerado pelo professor durante o planejamento de suas aulas. Este recurso estimula os educandos a trabalharem em grupo, discutindo com os colegas estratégias e possibilidades, permitindo que os alunos assumam papéis de protagonismo em seu processo de aprendizagem.

A educação estética propôs mais que uma simples analise sobre o quanto de geometria poderia haver em tais produções humanas, a interação dos alunos com obras de arte que extrapolavam regras matemáticas, incentivaram os alunos a imaginarem além do que eles estão acostumados, ou seja, que se sentiram mais a vontade de extrapolar as duas dimensões padrões do caderno.

Refletindo sobre a prática pedagógica, poderíamos melhora-la. Enquanto os alunos estavam analisando os sólidos geométricos afim de categoriza-los, os mediadores estavam ajudando os educandos encaminhando as discussões, como havia 5 mediadores, poderia ter um mediado em cada grupo acompanhando toda a discussão para assim pode orientar melhor aquela discussão. Entretanto, todos os mediadores ficaram ajudando os discentes de todos os grupos, apenas no final da intervenção percebemos que seria melhor a opção anterior. Outra dificuldade que encontramos durante a regência foi de partir das categorizações dos alunos para discutir os conteúdos. Além disso, no planejamento não esperávamos que os educandos demorassem tanto para escrever as justificativas da categorização dos sólidos, então tivemos que nos apresamos um pouco em relação ao tempo para a discussão das conclusões.

Enquanto futuros professores, levamos a experiência de termos nos adaptados a uma situação diferente do que havíamos planejado. Acreditamos que a situação vivida

demonstra que o cotidiano da sala de aula é dinâmico e que precisamos, além de um bom planejamento, ser criativos e não nos acomodarmos diante dos imprevistos.

5. Referências Bibliográficas

CHISTÉ, Priscila de Souza; SCHUTZ, Gerda Margit Foerste. **Leitura da Obra de arte como proposta de educação estética:** Contribuições de Marx e Vigotski. 2015. Disponível em: <https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/viewFile/5825/pdf_12>. Acesso em 30 de maio de 2018.

PIAGET, Jean. **O Desenvolvimento do Pensamento**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977.

VALE, Isabel. **Materiais Manipuláveis**. Instituto Politécnico de Viana do Castelo Escola Superior de Educação. Outubro de 2002.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. **Psicologia Pedagógica.** São Paulo: WMF MARTINS FONTES, 2010. 3ª ed.

WEDEKIN, Luana Maribele; ZANELLA, Andrea Vieira. **L. S. Vigotski e o ensino de arte**: "A educação estética" (1926) e as escolas de arte na Rússia 1917-1930. Proposições. V. 27, N. 2 (80), maio/ago. 2016. P. 155-176.

DO SUFOCO AO ALÍVIO: O PROJETO "DE OLHO NA ECONOMIA" AUXILIANDO NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DOS ALUNOS

Anderson José Silva

ajsprofmat@gmail.com

Resumo: O conhecimento e a criticidade em relação às questões financeiras são importantes e requer algumas informações que, apesar de constar nos currículos oficiais, por vezes não são ensinados aos alunos. O objetivo desta pesquisa consistiu em desenvolver e estimular em um grupo de alunos do Ensino Médio, a participação crítica e social em tais questões. Através de uma sequência de atividades os alunos compreenderam a utilidade e importância do saber correto sobre economia pessoal e familiar. O Projeto denominado "De Olho na Economia" envolveu uma série de atividades que auxiliaram na busca por uma participação legítima dos alunos em assuntos financeiros em suas famílias e consequentemente, na sociedade. O Projeto iniciou com a pesquisa de preços de produtos alimentícios e alguns eletrodomésticos que poderiam fazer parte da aquisição dos estudantes, buscando o discernimento correto sobre promoções e ofertas destas mercadorias. No segundo momento, houve as análises de juros em parcelamentos e pesquisas de economia doméstica que culminaram na divulgação semanal dos melhores locais para compras e orientações de economia através de um mural construído e atualizado de forma colaborativa pelos alunos. Após a coleta das informações, trabalhamos os conhecimentos necessários para calcular juros, proporções entre peso, volume, quantidade e discernir a veracidade de promoções do tipo "Pague dois, leve três", por exemplo. Quando falamos sobre decisões financeiras de compra, financiamento e parcelamento, alguns fatores como necessidade, urgência e sentimento, podem influenciar nas ações de consumo. Entretanto, as chances de tomar decisões mais acertadas e consequentemente ter uma boa saúde econômica perpassam pela Educação Financeira. Um exemplo prático e atual de como necessidade/urgência interfere na forma de comprar ou analisar uma operação financeira, são os smartphones. O produto tornou-se objeto de compra da maioria das pessoas, e seu uso pode estar associado ao trabalho, lazer, informação e outras necessidades atuais. É razoável dizer que diversos fatores que influenciam no consumo, afetam nosso emocional desde a tenra idade. Outra questão importante, é que muitos consumidores ao comprar algum produto, comparam apenas o valor das parcelas e o montante final. Via de regra, se a parcela "cabe no bolso", eu posso comprar. Esse pensamento é errôneo, e deixa de fora a análise das taxas de juros, que são diretamente responsáveis pelo valor final. Por outro lado, ao ser informado sobre uma taxa de 1,5% de uma mercadoria, o cliente pode-se perguntar: o que farei com essa informação? Como aplicar esse número para descobrir algo sobre o que estou comprando? Diante de tais indagações amaduremos nossa pesquisa e definimos o objetivo de auxiliar os alunos e seus familiares com orientações sobre economia doméstica. Como resultado, comprovamos uma mudança positiva dos participantes de modo que estes tornaram-se conhecedores das formas de juros em financiamentos e por conseguinte, analistas de suas ações, levando à alguns questionamentos e mudanças relacionadas à sua educação financeira.

Palavras Chaves: Educação Matemática. Educação Financeira. Criticidade.

1. Introdução

É notável que pesquisas, artigos, dissertações e teses sobre Educação Matemática Financeira têm aumentado consideravelmente, principalmente diante de informações midiáticas sobre economia e dinheiro, o que contribui para formação de grupos de pesquisa e estudos na área. A Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico (2004, p. 223) explica que:

> Educação financeira sempre foi importante aos consumidores, para auxiliá-los a orçar e gerir a sua renda, a poupar e investir, e a evitar que se tornem vítimas de fraudes. No entanto, sua crescente relevância nos últimos anos vem ocorrendo em decorrência do desenvolvimento dos mercados financeiros, e das mudanças demográficas, econômicas e políticas.

Quando falamos sobre decisões financeiras de compra, financiamento e parcelamento, alguns fatores como necessidade, urgência e sentimento, podem influenciar nas ações de consumo. Entretanto, as chances de tomar decisões mais acertadas e consequentemente ter uma boa saúde econômica perpassam pela Educação Financeira, como cita Santos (2011, p. 20):

> Uma pessoa educada do ponto de vista financeiro certamente poderá realizar mais escolhas racionais, podendo conhecer e comparar a maior parte dos instrumentos e produtos à sua disposição, minimizando assim a influência, por exemplo, de certos argumentos de venda, que geralmente funcionam com base na falta de conhecimentos por parte dos compradores.

Um exemplo prático e atual de como necessidade/urgência interfere na forma de comprar ou analisar uma operação financeira, são os smartphones. O produto tornou-se objeto de compra da maioria das pessoas, e seu uso pode estar associado ao trabalho, lazer, informação e outras necessidades atuais. É razoável dizer que diversos fatores que influenciam no consumo, afetam nosso emocional desde a tenra idade, por isso, concordamos com D`AQUINO (2009, [s.p.]) quando cita:

> O modo como cada um de nós lida com as finanças reflete nossas emoções, ambições, valores e sentimentos de autoestima. Não por acaso a vida financeira das pessoas conta quase tudo sobre o modo como elas vêem a si e aos outros. O fato é que construímos as bases de nossa relação com o dinheiro até por volta dos 5 anos de idade. Atitudes que funcionaram na infância e levaram-nos a conseguir os resultados desejados foram, em boa parte, os responsáveis pela formação da mentalidade financeira que temos hoje. Não é difícil, por exemplo, reconhecer em adultos mimados, que se comportam como se o mundo inteiro lhes devesse os favores de repetidos empréstimos a fundos perdidos, traços egocêntricos da criança que cresceu sem que ninguém

> impusesse limites aos seus desejos. Evidente que nada é tão definitivo em relação a falta de jeito para lidar com as finanças que não se possa, no decorrer da vida, consertar e aprender. Mas o ideal é receber, ainda criança, educação em relação ao dinheiro.

Outra questão importante, é que muitos consumidores ao comprar algum produto, comparam apenas o valor das parcelas e o montante final. Via de regra, se a parcela "cabe no bolso", eu posso comprar. Esse pensamento é errôneo, e deixa de fora a análise das taxas de juros, que são diretamente responsáveis pelo valor final. Por outro lado, ao ser informado sobre uma taxa de 1,5% de uma mercadoria, o cliente pode-se perguntar: o que farei com essa informação? Como aplicar esse número para descobrir algo sobre o que estou comprando? Diante de tais indagações percebemos a importância de trabalhar a Educação Financeira nas escolas.

2. Revisão Bibliográfica

Além de Ole Skovsmose (2001), contribuem também alguns autores que conversam entre si sobre uma educação pautada pela participação e pelo conhecimento, objetivando preparar o aluno para o trabalho e cidadania. Observando os parâmetros reguladores da educação do ensino médio, percebemos a preocupação no ensino e aplicação prática da matemática em situações variadas.

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno (BRASIL, 1999, [s.p.]).

O que nos parece bastante interessante, é justamente as possibilidades de aplicações práticas que a Educação Matemática Financeira permite. Podemos afirmar que o exercício da cidadania é um pressuposto da Educação Financeira. Silva (2016), afirma que, para o estudante estar qualificado para o mundo do trabalho, o ensino da matemática deve ajudá-lo a desenvolver a compreensão da realidade em que está inserido de modo a ampliar seus recursos cognitivos.

Como docente, percebo não poucas vezes, um entendimento estritamente procedimental da matemática pelos alunos e uma "busca cega" pela resposta final dos exercícios. O

professor deve levar os alunos a um entendimento holístico e, quando possível, prático dos conteúdos ministrados. Tais atitudes podem motivar os alunos, ou pelo menos dar um sentido plausível aos trabalhos desenvolvidos.

Uma mudança de postura no processo de ensino dos professores levará um tempo para provocar os impactos esperados na sociedade, a ideia é que os alunos desenvolvam o espírito crítico e saibam se posicionar corretamente no mundo do trabalho como relata D´Aquino (2009, [s.p.]):

> O grande desafio da educação não é educar para hoje, mas educar para que os resultados possam florescer em 15, 20, 30 anos. Nos dias atuais, em que ocorrem transformações tão abruptas e complexas, é preciso um grande esforço para educar as crianças não para este mercado de trabalho[14], tal como conhecemos e fomos educados para ele, mas para um mercado que mal podemos imaginar como será. Desenvolver o espírito empreendedor e estimular modos inovadores de raciocínio, por exemplo, são ferramentas essenciais à preparação de nossas crianças e jovens para o futuro.

Não se pode negar que em muitas escolas existe o que chamo de "gargalo financeiro", que defino como a dificuldade em se trabalhar conteúdos sobre Educação Matemática Financeira. Mesmo sendo orientados pelas Diretrizes oficiais, muitos professores ignoram o assunto e priorizam outros conteúdos. As hipóteses para a existências destes gargalos carecem de pesquisas mais aprofundadas, porém, Santos (2011) indica que um dos fatores para a supressão dos conteúdos sobre Educação Financeira é o desconhecimento do conteúdo por parte dos professores.

3. O Projeto

Neste tópico discutiremos sobre o projeto "De Olho na Economia". As sequencias de atividades inerentes ao tema, foi desenvolvida com os alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola de ensino regular no município de Vitória no Espírito Santo, cujo objetivo principal foi pesquisar os preços de itens da cesta básica de alimentos e também de alguns eletrodomésticos, discutindo as diferentes formas de pagamentos existentes.

14 Apesar do autor usar o termo mercado de trabalho, nesta dissertação usaremos mundo do trabalho, por acreditarmos que se aproxima das reflexões dos teóricos tomados como referência.

Na primeira etapa os alunos foram aos supermercados localizados nas redondezas da escola a fim de pesquisar os produtos previamente estabelecidos. Após a cotação, os dados eram trazidos para sala de aula e analisados conforme as quantidades definidas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE). Em um segundo momento os participantes pesquisaram produtos eletroeletrônicos e os hipotéticos juros embutidos nos mesmos.

Após pesquisas, discussões e análises, foi criado coletivamente, um mural informativo na escola contendo informações com as melhores opções de compra dos itens pesquisados além de dicas interessantes sobre economia doméstica. Também foi trabalhado conceito de porcentagem, juros simples e juros compostos em sistemas de parcelamentos.

De posse dos dados analisado, os alunos fizeram a exposição dos resultados no "Mural da Economia". O mural foi construído colaborativamente com alunos e professores em um espaço de 1 metro de altura por 2 metros de comprimento no acesso principal da escola onde todos os alunos e visitantes tiveram fácil visualização. O esboço inicial feito pelos alunos pode ser visto na figura 9.

Figura 14: Esboço do "Mural da Economia"

Fonte: Os autores.

3.1 Cesta Básica

No gênero alimentício, adotamos como referência a cesta básica definida pelo DIEESE (Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos) para cada região. É importante citar que próximo à escola há cinco supermercados que atendem os moradores da região, o que torna a pesquisa mais útil e viável. Apresentamos também a tabela de provisões mínimas estipuladas pelo Decreto Lei n° 399 de 1938 do referido órgão que ainda está em vigor.

Tabela 1 – Itens da cesta básica segundo o DIEESE

Alimentos	**Região 1**	**Região 2**	**Região 3**	**Nacional**
Carne	6,0 kg	4,5 kg	6,6 kg	6,0 kg
Leite	7,5 I	6,0 I	7,5 I	15,0 I
Feijão	4,5 kg	4,5 kg	4,5 kg	4,5 kg
Arroz	3,0 kg	3,6 kg	3,0 kg	3,0 kg
Farinha	1,5 kg	3,0 kg	1,5 kg	1,5 kg
Batata	6,0 kg	6,0 kg	6,0 kg	6,0 kg
Legumes (Tomate)	9,0 kg	12,0 kg	9,0 kg	9,0 kg
Pão francês	6,0 kg	6,0 kg	6,0 kg	6,0 kg
Café em pó	600 gr	300 gr	600 gr	600 gr
Frutas (Banana)	90 unid	90 unid	90 unid	90 unid

Fonte: DIEESE (2017).

Nota: Decreto Lei 399 de 1938. Quadros anexo. As quantidades diárias foram convertidas em quantidades mensais.

A quantidade de cada item é estabelecida de acordo com as necessidades básicas mensais das famílias com quatro pessoas em cada estado brasileiro

As pesquisas de preços dos alunos seguiram os parâmetros da Região 1, que de acordo com o DIEESE, representa a região sudeste. Em relação às marcas dos produtos, o órgão estabelece que para cada produto, é necessário estabelecer o tipo, marca e unidade de medida com maior frequência de oferta no mercado consumidor. Assim, os grupos selecionaram três marcas de cada produto indicado pelo referido Departamento. Resumindo, o levantamento de preço de cada item foi cotado observando três marcas mais ofertadas nos estabelecimentos, ou quando foi necessário, a critério do aluno.

Os preços encontrados foram organizados em planilhas para facilitar as análises.

Os alunos desenvolveram fórmulas que calculam a diferença de preços automaticamente através do editor de planilhas Excel®.

3.2 Eletrodomésticos

Quanto aos eletrodomésticos, os alunos decidiram pesquisar os preços de alguns produtos como TV, geladeira e smartphone. Na região há três lojas do ramo que foram visitadas pelos grupos.

A pesquisa de preços dos eletrodomésticos foi feita de forma simples e objetiva. O importante foi conhecer as supostas taxas de juros praticados nos estabelecimentos. Os alunos escolheram as marcas e/ou as configurações de cada eletroeletrônico.

4. Discussões e Resultados

Na primeira parte dos trabalhos, a turma foi dividida em sete grupos de cinco integrantes e esses grupos iniciaram a pesquisa dos produtos em supermercados da região, de posse de uma tabela para anotação dos dados. As comparações, reflexões e alguns cálculos, iniciaram nessa, ao passo que os alunos começaram a perceber a diferença considerável de preço de um mesmo produto, marca e quantidade.

A análise dos preços de smartphones, TV´s e Geladeiras, bem como os parcelamentos disponíveis destes produtos, foram feitos na segunda fase do Projeto. No Mural, foram divulgadas as indicações mais vantajosas para as compras de alimentos, melhores preços dos eletroeletrônicos e dicas de economia.

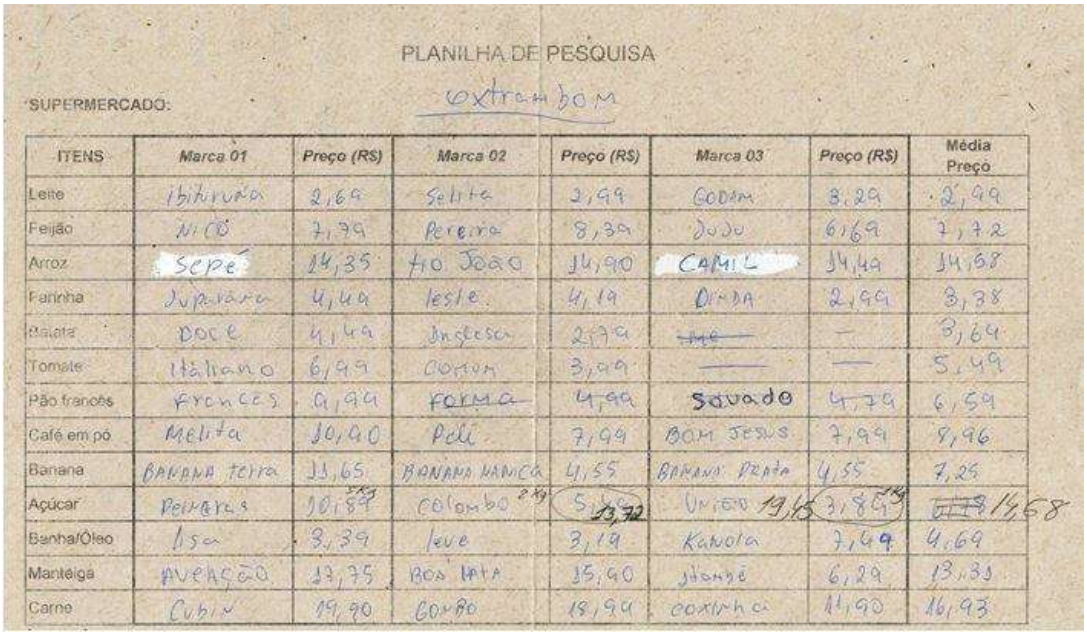
4.1 Análises dos produtos da cesta básica

Especialistas em economia orientam que uma dica importante para economizar é pesquisar em diversos estabelecimentos antes de efetivar a compra. Inicialmente, os alunos disseram que a maioria de seus familiares eram resistentes a tal orientação, sob o argumento de ser trabalhoso ou mesmo por falta de tempo. O Projeto foi importante, pois começou a mudar essas opiniões sem suas famílias. D'Ambrósio (2002, p. 66) afirma que a educação deve possibilitar ao estudante a "[...] aquisição e utilização de instrumentos comunicativos, analíticos e materiais que serão essenciais para o exercício de todos os direitos e deveres intrínsecos à cidadania".

Na figura 10 está uma das primeiras cotações realizadas por um determinado grupo e podemos perceber correções feitas pelos próprios participantes em sala de aula. As correções estão relacionadas com a quantidade e o preço, como por exemplo, o açúcar

que ora foi cotado o preço de 5 Kg e ora com o preço de 2 e de 1 Kg, indicando falta de prática e também de atenção na observação dos preços e da quantidade dos produtos.

Figura 2: Tabela com a cotação dos preços contendo erros e correções feitas pelos alunos



PLANILHA DE PESQUISA

SUPERMERCADO: extrambom

ITENS	Marca 01	Preço (R$)	Marca 02	Preço (R$)	Marca 03	Preço (R$)	Média Preço
Leite	Ibituruna	2,69	Selita	2,99	Godam	3,29	2,99
Feijão	Nico	7,79	Pereira	8,39	Dodo	6,69	7,72
Arroz	Sepé	14,35	tio João	14,90	Camil	14,49	14,68
Farinha	Juparana	4,49	leste	4,19	Dinda	2,99	3,38
Batata	Doce	4,49	Inglesa	2,79	~~Inglesa~~	—	3,64
Tomate	Italiano	6,99	comum	3,99	—	—	5,49
Pão francês	Frances	6,99	~~forma~~	4,99	Saudo	4,79	6,59
Café em pó	Melita	10,40	Pelé	7,99	Bom Jesus	7,99	8,96
Banana	Banana terra	11,65	Banana Nanica	4,55	Banana Prata	4,55	7,25
Açúcar	Peixaras	10,89	Colombo 2kg	5,19 ~~3,72~~	União 1kg	3,89	~~[illegible]~~ 14,68
Banha/Óleo	Isa	3,39	leve	3,19	Kanola	7,49	4,69
Manteiga	Nuenação	13,75	Boa Nata	15,90	Jandé	6,29	13,35
Carne	Cubin	19,90	Combo	18,99	coxinha	11,90	16,93

Fonte: Os autores.

Após algumas semanas de pesquisas em supermercados, percebemos na figura 11, uma melhora considerável na escrita e consequentemente na atenção quanto à quantidade e o preço dos produtos, o que pode caracterizar também, uma evolução na observação e no cuidado financeiro.

Figura 3: Tabela feita pelos alunos com a cotação dos preços

PLANILHA DE PESQUISA

SUPERMERCADO: SCHUMAMBA

ITENS	Marca 01	Preço (R$)	Marca 02	Preço (R$)	Marca 03	Preço (R$)	Média Preço
Leite 1L	Selita	2,99	Itambé	2,79	Italac	3,12	2,96
Feijão 1 Kg	Guru	6,89	Leste	5,99	Combrabel	9,59	7,49
Arroz 5 Kg	Sepé	14,29	Calabate	16,89	Tio João	18,49	16,55
Farinha 1 Kg	Guparama	4,80	Leste	3,98	Dinda	2,80	3,86
Batata Kg	Doce	3,20	inglesa	2,15			2,67
Tomate Kg	Italiano	6,79	Comum	3,77			5,28
Pão francês Kg	9,99						9,99
Café em pó 500g	Cafuzo	8,99	número um	7,20	melita	12,00	9,39
Banana Kg	Terra	9,70	Nanica	3,99	Prata	3,80	5,83
Açúcar 5 Kg	Paineiras	10,89	Cristalçucar	13,49	Uniric	18,99	14,45
Banha/Óleo 900ml	Liza	3,29	Soya	3,19	Leve	2,98	3,15
Manteiga 500g	Itambé	18,30	Selita	19,00	Capel	17,69	18,33
Carne Kg	Paleta	16,90	Acém	14,60	Patinho	19,99	17,16

Fonte: Os autores.

Em relação às saídas com o objetivo de pesquisar os preços, grande parte acontecia durante o horário das aulas e sempre com a devida autorização da direção escolar e dos responsáveis pelos alunos.

Foram importantes as saídas para visitar os supermercados durante as aulas, pois segundo os alunos, eles podiam sair daquele ambiente rotineiro e realizar algo diferente. Ao retornar para sala, eram visíveis a empolgação e a vontade de analisar o quanto antes os dados colhidos.

Figura 4: Alunos em pesquisa de campo.

Fonte: Os autores.

As informações anotadas pelos grupos eram analisadas entre os participantes em sala de aula, sendo que, cada grupo podia interagir livremente com outros.

As vantagens de trabalhar nessa perspectiva é o fortalecimento da coletividade, da interação entre a turma e o treinamento para agir em situações que exijam trabalho em equipe.

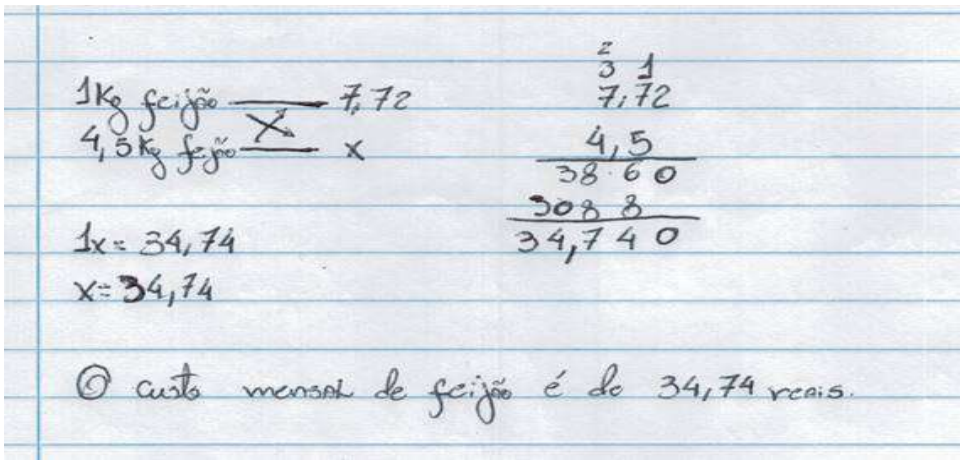
Figura 5: Alunos analisando os dados em sala de aula.

Fonte: Os autores.

4.2 Proporção e números decimais

Notamos que em alguns casos, a quantidade ofertada nos estabelecimentos não condiz com a estabelecida pelo DIEESE. O feijão foi cotado observando o preço de 1 quilo, porém o órgão estabelece a média mensal de 4,5 quilos. Assim, foi dada oportunidade para aos alunos opinarem qual o cálculo poderia ser feito para encontrar o valor total, e como esperado, a maioria dos alunos citou a regra de três para a resolução da questão. Aproveitamos para esclarecer que a regra é um facilitador para o cálculo de proporcionalidade e que há uma relação de uma constante multiplicativa envolvida. Observe na figura 16 o cálculo efetuado por um dos alunos

Figura 6: Uso da regra de três no cálculo de proporcionalidade.



Fonte: Os autores.

4.3 Smartphones

A tecnologia está acessível e faz parte da geração de alunos que já nasceram na chamada "era digital". Ao propormos as investigações de financiamentos de eletroeletrônicos, os discentes perguntaram se podiam realizar a pesquisa utilizando também a internet, o que prontamente foi aceito pelo professor pesquisador.

Na figura 7 começamos a discutir sobre os anúncios captados pelos alunos cujo conteúdo foi retirado de um site de vendas on-line.

Figura 7: Smartphone pesquisado em loja de vendas on-line.

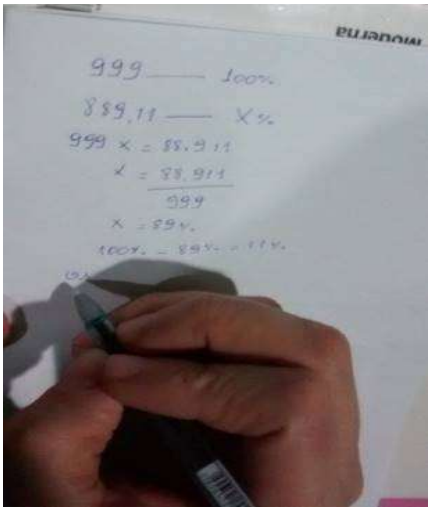
Fonte: Americanas (2017).

A primeira questão colocada para os alunos foi: Qual o percentual de desconto obtido no pagamento por meio de boleto bancário?

Utilizando a proporcionalidade por meio da regra de três, grande parte dos alunos encontrou a resposta utilizando o seguinte raciocínio: No boleto, pagamos R$ 110,89 a menos que nos cartões. Quanto em porcentagem isso representa no total de R$ 999,00? O resultado encontrado foi de 11%.

É importante frisar que alguns alunos erraram os cálculos com os números decimais, o que nos levou a reforçar novamente este tópico durante as aulas.

Figura 8: Proporcionalidade através da regra de três.



Fonte: Os autores.

A segunda questão colocada para os alunos foi: Considerando que as taxas de financiamentos são obtidas por meio de juros compostos, qual foi a taxa empregada para a compra do smartphone parcelado no cartão?

Quando dada a pergunta acima, a primeira preocupação dos alunos foi em aplicar os dados colhidos na fórmula de juros compostos, a qual conhecemos em geral, por $M = C.(1+i)^t$. Para não mecanizar a situação, convidamos os alunos a refletirem na situação e na utilidade do problema conforme relata Skovsmose (2001), que cita a necessidade que os estudantes têm de saber interpretar o mundo usando a Matemática como linguagem e recurso, de maneira crítica e reflexiva.

Ainda segundo Skovsmose (2000), os estudantes precisam participar do processo de exploração e explicação, criando assim um novo ambiente de aprendizagem. O autor dinamarquês afirma que fazer exercícios sem entender o sentido e a utilidade destes pode não fazer diferença na vida dos estudantes.

Santos (2015) afirma que é necessária uma mudança na abordagem de problemas na matemática como algo abstrato, pois pode não trazer sentido à vida dos estudantes e o professor pode contribuir para mudar essa situação.

A princípio, a maioria dos alunos entendeu a pergunta como mais um exercício de matemática. Quando feita uma reflexão coletiva, alguns comentários foram surgindo do tipo:

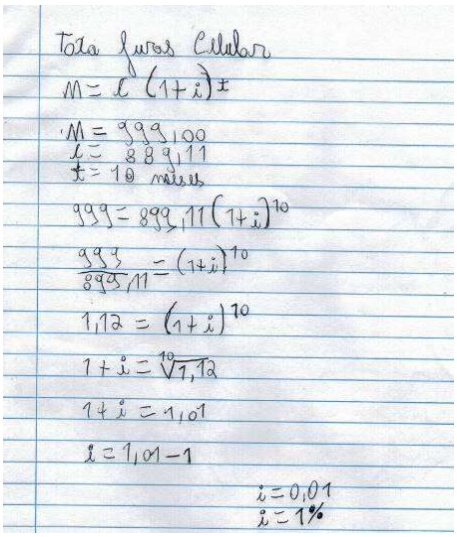
- *"É importante saber a taxa. Isso influencia no preço"* (ALUNO A)

- *"As vezes o preço de um produto está bom, mas dependendo da taxa de juros no parcelamento, o produto fica caríssimo*" (ALUNO B)

- *"Então na verdade, o principal é conhecer as taxas. Como que às vezes eles colocam as taxas de juros em letras tão pequenas nos anúncios?"* (ALUNO C)

Voltando aos cálculos, para essa questão específica, foi permitido o uso da calculadora tendo em vista que o problema pode virar uma raiz décima de 1,12. Os alunos acostumados apenas com exercícios e questões que pediam apenas o Montante ou Capital dos Juros Compostos, puderam ter na atividade possibilidade de se conhecer também a taxa e o tempo envolvido.

Figura 9: Cálculo realizado por um dos alunos.



Fonte: Os autores.

Nesta parte dos trabalhos fizemos algumas ponderações importantes com os alunos. Uma delas foi a conscientização de que a taxa encontrada no cálculo não condiz com a realidade, uma vez que considera apenas o pagamento integral após 10 meses. Outro ponto que esclarecemos foi que, admitindo que há pagamentos intermediários e periódicos, é necessário a compreensão sobre Série de Pagamentos Postecipados.

5. Considerações Finais

Fazendo uma breve síntese, os alunos planejaram as ações de pesquisa, foram a campo nas coletas de preços, discutiram sobre financiamentos e juros com vendedores de

diversos estabelecimentos, analisam em sala de aula os dados e compartilharam as informações e os conhecimentos adquiridos.

O que ficou claro para nós, enquanto pesquisadores, é que, de acordo com as atitudes, relatos escritos e orais, as ações dos alunos em relação à economia e finanças estavam mais críticas, conscientes e reflexivas. As propagandas agora, são analisadas pelos participantes do Projeto com mais perspicácia.

A pesquisa de produtos da cesta básica, também ajudou no desenvolvimento das competências econômicas do aluno, beneficiando seus familiares, que agora são auxiliados pela observação constante sobre promoções e descontos. As grandes variações de preços nos estabelecimentos pesquisados chamaram a atenção para a importância de realizar um orçamento em vários locais antes de efetivar uma compra.

O Mural da Economia foi montado pelos alunos e pela professora de Artes da escola, que colaborou com a criação e manutenção do mesmo. O Mural, a princípio, foi atualizado semanalmente e isso gerou um senso de responsabilidade e compromisso nos integrantes, fortalecendo o trabalho em equipe.

Consideramos importantes as pesquisas, debates e projetos sobre economia, principalmente no cenário atual que reclama por cidadãos proativos, munidos de conhecimento e que saiba trabalhar em grupo. O Brasil vive um aumento considerável de endividados e o consumo desenfreado é percebido em muitas famílias. Portanto, a Matemática e a Educação Financeira devem ser discutidas e estudadas nas escolas com mais diligência do que vemos hoje.

6. Referências

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

AMARAL, Gustavo Perini. **Educação matemática financeira**: construção do conceito de moeda no último ano do ensino fundamental. 2013. 143 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

BASTOS, João Augusto de Souza. **Educação e Tecnologia**. Porto Alegre: PUCRS, 2011.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática. **Revista proposições**, n. 10, v. 4, mar. 1993.

BRASIL, Agência. **Smartphone se consolida como meio preferido de acesso à internet, diz pesquisa.** Disponível em:

<http://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2017-02/sete-em-cada-dez-brasileiros-acessam-internet-e-elevam-uso-de-smartphone>. Acesso em: 20 nov. 2017.

BRASIL. **Cartilha de Educação Financeira para Pais**. Série ações de cidadania. n.12. ed. Câmara. Brasília: Câmara dos Deputados, 2011.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Ministério da Educação e do Desporto. Brasília: MEC/SEF, 1996.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação** – Reflexões sobre Educação e Matemática. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 8. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

LOJISTAS, Confederação Nacional de. **Mesmo com crise econômica, quatro em cada dez brasileiros compram por impulso.** Disponível em:

<http://www.cndl.org.br/noticia/mesmo-com-crise-economica-quatro-em-cada-dez-brasileiros-compram-por-impulso/>. Acesso em: 12 set. 2017.

MARTINS, José Pio. **Educação Financeira ao alcance de todos**: adquirindo conhecimentos financeiros em linguagem. São Paulo: Fundamento Educacional, 2004.

MONTANHAS CAPIXABAS: UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DE MOVIMENTO UNIFORME

Josiene Senhor da Silva

josienesenhor@hotmail.com

Resumo: O processo de ensino e aprendizagem tem se transformado em uma tarefa desafiadora que nos leva a refletir sobre nossas práticas em sala de aula e à busca por caminhos que viabilize a participação ativa do aluno, que o leve à construção significativa de seu conhecimento. Esse trabalho relata uma experiência acerca da aprendizagem de Movimento Uniforme, a partir de uma atividade de Modelagem Matemática na concepção de Rodney Carlos Bassanezi (2009). A atividade foi realizada em uma escola estadual do município de Vila Velha, baseada em situações do mundo real, em um ambiente investigativo, em que os alunos foram convidados a abordar o problema "Planejar uma Viagem para conhecer as Montanhas Capixabas". Os alunos trabalharam em grupo, de forma que cada grupo deveria planejar a viagem para uma cidade das montanhas do Espírito Santo: Domingos Martins, Marechal Floriano, Venda Nova do Imigrante, Santa Leopoldina, Santa Maria de Jetibá ou Santa Teresa. Os alunos utilizaram o Google Maps para pesquisar as trajetórias possíveis para chegar ao destino, e informar as rodovias e as distâncias a serem percorridas em cada rota, além de escolheram a rota a ser seguida pelo grupo, caso houvesse mais de uma opção. A partir de um referencial, os alunos definiram a função horária do movimento do carro do grupo, considerando que a viagem se daria com a velocidade constante de 50 km/h. Além disso, também fazia parte do problema, descobrir onde e quando se daria o encontro entre o carro do grupo e o carro da professora, já que a professora sairia no mesmo horário, porém 20 km de distância a frente do referencial escolhido, com velocidade constante de 40 km/h. Os alunos utilizaram as representações algébricas, tabular e gráfica para representar o movimento, e prever algebricamente e graficamente - através da interseção das retas que representavam os movimentos – onde e quando ocorreria o encontro dos dois carros. A mobilização de mais de uma representação e a conversão de uma para outras representações, proporcionou aos alunos uma melhor compreensão e interpretação dos dados do problema, mesmo com as dificuldades verificadas por alguns grupos em realizar a conversão da representação tabular para a gráfica. A avaliação da atividade de Modelagem se deu a partir dos conceitos de Representação Semióticas de Raymond Duval (2009), e reforçou a importância da utilização de mais de uma representação semiótica para uma melhor compreensão do objeto estudado pelo aluno. Ao final da atividade, cada grupo apresentou a estratégia usada para resolver o problema proposto, mostrando os mapas, as tabelas, os gráficos, as funções horárias do movimento, os cálculos, além de informações turísticas sobre a cidade a ser visitada, incluindo horário e valor da passagem de ônibus. Os alunos relataram ter gostado muito de como a atividade foi realizada, e que se surpreenderam com as várias e belas atrações turísticas que o estado tem, e mais ainda, de saberem que elas estão muito próximas deles, e que são de fácil acesso.

Palavras Chaves: Movimento, Modelagem Matemática, Representações Semióticas.

1. Introdução

O processo de ensino e aprendizagem tem se transformado em uma tarefa desafiadora que nos leva a refletir sobre nossas práticas em sala de aula, e a busca por caminhos que viabilize a participação ativa do aluno, que o leve à construção significativa de seu conhecimento.

Em nossa prática, buscamos uma aprendizagem, que extrapole a sala de aula, em que o aluno possa adquirir habilidades e competências, de forma que ele consiga aplicar seus conhecimentos no cotidiano, beneficiando a si mesmo e a sociedade na qual ele vive.

Nesse sentido, a Matemática possui um papel social importante na inclusão das pessoas na sociedade e na formação cidadã, na medida, que fornece a elas instrumentos para que se possa atuar criticamente no mundo em que vive, de forma que o conhecimento matemático esteja articulado à trajetória e o contexto de vida do aluno.

A Modelagem Matemática pode ser vista como uma estratégia de aprendizagem, com etapas de processo onde o conteúdo matemático adquire significado. Para Bassanezi (2004, p. 24):

> Modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Acreditamos que o emprego da Modelagem Matemática possa contribuir para a questão do ensino de Matemática, trabalhando situações diferentes que não exijam apenas a reprodução de comportamentos e a memorização.

Quanto ao uso da modelagem na Educação, Bassanezi (2009), elenca argumentos de diferentes naturezas, que entendemos da seguinte forma:

1) Formativa — permite desenvolver capacidades e atitudes criativas e explorativas;
2) De competência crítica — potencializa o pensamento reflexivo, a intervenção de pessoas nos debates e tomadas de decisões sociais que envolvem a aplicação da Matemática;
3) De utilidade — prepara o aluno a usar a Matemática nas resoluções de problemas em diversas situações;
4) Intrínseca — favorece ao aluno entender e interpretar a própria Matemática;
5) De aprendizagem — possibilita a compreensão dos argumentos matemáticos, facilita guardar conceitos e resultados e valoriza a Matemática;

6) Alternativa epistemológica — metodologia alternativa mais adequada às realidades socioculturais.

Além disso, na aprendizagem matemática são consideradas atividades como apreensão conceitual, raciocínio, resolução de problemas, compreensão de textos, entre outros, que requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural, ou seja, os fenômenos relacionados ao conhecimento estão relacionados à noção de representação.

Nesse sentido, esse trabalho relata uma experiência acerca da aprendizagem de Movimento Uniforme, a partir de uma atividade de Modelagem Matemática na concepção de Rodney Carlos Bassanezi (2009), utilizando vários registros de representação semiótica na solução do problema.

2. Registros de Representação Semiótica

As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de regras de sinais, como por exemplo: enunciado em língua natural, tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, figuras geométricas, expressões algébricas, um meio que o ser humano utiliza para explicar suas representações mentais, ou seja, atender à função de comunicação.

Elas também são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática, pois possibilitam o tratamento do objeto matemático. Um mesmo objeto pode ser apresentado por representações muito diferentes. No entanto, deve-se observar a distinção entre o objeto e a sua representação, caso contrário, isso pode influenciar numa perda de compreensão a respeito do objeto.

De acordo com Duval (2009, p.38), para que uma representação seja considerada como uma representação para o sujeito, ou seja, como um acesso ao objeto representado, duas condições devem ser garantidas: o sujeito deve dispor de no mínimo dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação do objeto e que possa existir espontaneamente a conversão de um sistema semiótico a outro.

Para Duval (2009, p. 82), “a atividade conceitual implica a coordenação dos registros de representação”, uma vez que as dificuldades de compreensão conceitual se manifestam

pela dificuldade de conversão e pela utilização dos conhecimentos em situações da vida real na sociedade.

Para Duval (2009, p. 36), um sistema semiótico permite três atividades cognitivas, a saber:

> a) constituir traços que sejam identificáveis, ou seja, leva à uma representação identificável;
>
> b) transformar uma representação de um objeto, usando apenas as regras inerentes ao próprio sistema;
>
> c) converter uma representação de um objeto de um sistema em uma representação do mesmo objeto de outro sistema.

A transformação dos registros semióticos pode ocorrer de duas maneiras, pelo tratamento ou pela conversão.

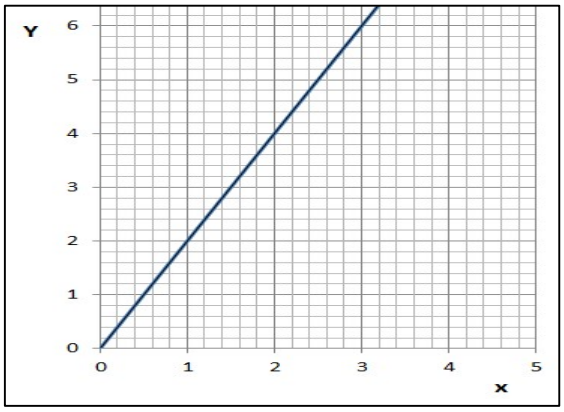
O tratamento corresponde à uma transformação interna em relação ao registro de representação de partida, e ocorre quando a transformação do registro de representação se mantém no mesmo sistema semiótico. Por exemplo:

$$3x = 15 e x = 5.$$

Nesse caso, houve tratamento, pois houve transformação do registro de representação, porém sem sair do sistema semiótico, ou seja, dentro do registro de representação algébrico.

A conversão corresponde à transformação externa em relação ao registro de representação de partida, e ocorre quando o registro de representação é transformado de um sistema semiótico para outro. Ela implica em mudança no procedimento de interpretação, o que pode influenciar na compreensão do objeto. Por exemplo: $y = 2x$ e o gráfico da Figura 1:

Figura 1: Representação gráfica da relação entre y e x.



Fonte: Os autores.

Nesse caso, houve conversão, pois houve transformação do registro de representação, de um sistema semiótico para outro, ou seja, mudou do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico.

3. Atividade de Modelagem Matemática

Foi proposta uma atividade de Modelagem Matemática, aos alunos da 1ª Série do Curso Técnico Integrado de Administração de Empresas, em uma escola estadual do município de Vila Velha, em que eles foram convidados a abordar o problema "Planejar uma Viagem para conhecer as Montanhas Capixabas".

Os alunos trabalharam em grupo, de forma que cada grupo deveria planejar a viagem para uma das cidades das montanhas do Espírito Santo: Domingos Martins, Marechal Floriano, Venda Nova do Imigrante, Santa Leopoldina, Santa Maria de Jetibá ou Santa Teresa.

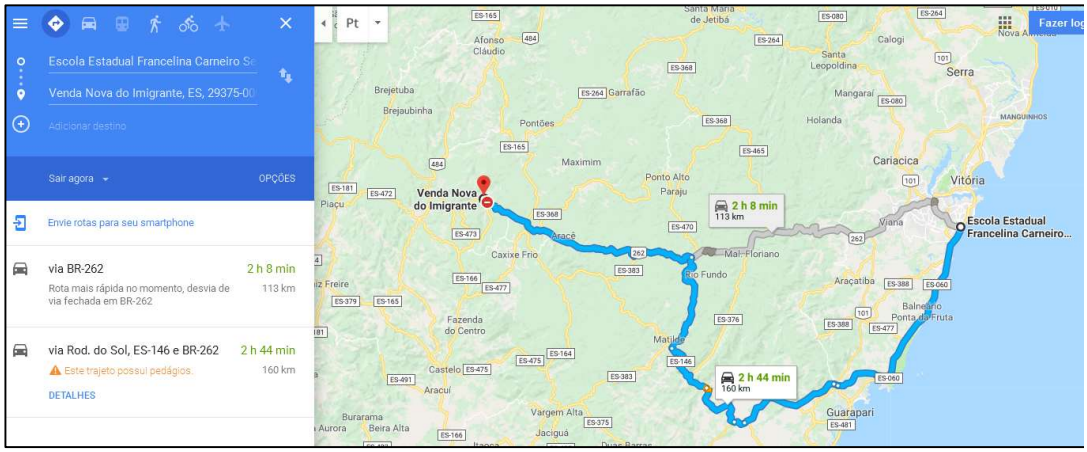
Esse planejamento consistia em pesquisar as trajetórias possíveis para chegar ao destino, e informar as rodovias e as distâncias a serem percorridas em cada rota, além de buscar informações interessantes sobre o local a ser visitado: história, geografia, economia, cultura, pontos turísticos.

Além disso, existiam alguns pontos a serem considerados: o carro do grupo viajará com a velocidade constante de 50 km/h a partir do referencial escolhido pelo grupo, e o carro da professora, sairá no mesmo horário que o carro do grupo, porém à 20 km de distancia a frente do referencial escolhido, com velocidade constante de 40 km/h. O grupo deveria

respondera aos questionamentos: Os carros irão se encontrar? Em caso afirmativo, onde e quando?

Inicialmente, cada grupo utilizou o Google Maps, para pesquisar as trajetórias possíveis para chegar ao destino, e informar as rodovias e a distância a ser percorrida em cada rota, além de escolher a rota a ser seguida pelo grupo, caso houvesse mais de uma opção.

Figura 2: Pesquisa no Google Maps para o destino Venda Nova do Imigrante.



Fonte: Os autores.

A Figura 2 mostra o resultado da pesquisa no Google Maps, realizada por um dos grupos, para o destino Venda Nova do Imigrante, onde podem ser visualizadas duas rotas. A rota em azul com 160 km e a rota cinza passando pela BR 262 com 113 km de distância. O grupo escolheu a rota cinza de 113 km.

Vale ressaltar que a velocidade é uma grandeza vetorial, ou seja, além do seu valor deve ser considerada uma orientação: sua direção e sentido. Pode-se observar na Figura 2 que a trajetória não é retilínea, de forma que a velocidade não se manteria constante mesmo que o seu valor não variasse. Nesse sentido, os alunos realizaram uma simplificação através da modelagem matemática, ao considerar uma trajetória retilínea e utilizar o modelo matemático do Movimento Uniforme.

A partir de um referencial, os alunos definiram a função horária do movimento do carro do grupo, e do carro da professora, a partir das considerações do problema apresentado e das simplificações consideradas. O referencial escolhido foi o ponto de partida do grupo, a escola.

Os alunos utilizaram as representações algébricas, tabular e gráfica para representar o movimento, e prever onde e quando ocorreria o encontro dos dois carros.

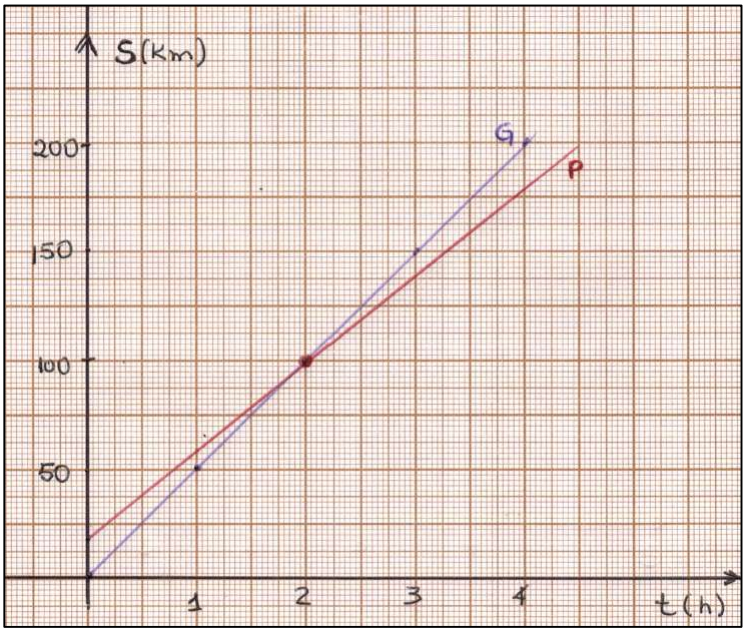
Figura 3: Representação tabular do movimento dos carros.

tempo (h)	GRUPO (v=50 Km/h) posição (Km)	PROFESSORA (v=40 km/h) posição (Km)
0	0	20
1	50	60
2	100	100
3	150	140
4	200	180

Fonte: Os autores.

A Figura 3 mostra a representação tabular usada para responder ao questionamento feito acerca do encontro do carro do grupo com o carro da professora. A faixa em amarelo marca o momento em que os dois carros poderão se encontrar, ou seja, quando tempo(t) é igual a 2h, os dois carros estarão no mesmo lugar, eles terão percorrido 100 km.

Figura 4: Representação gráfica do movimento dos carros



Fonte: Os autores.

A Figura 4 mostra a representação gráfica usada para responder ao questionamento feito acerca do encontro do carro do grupo (G) com o carro da professora (P). O ponto de interseção das retas que representavam os movimentos dos carros marca o momento em que os dois carros poderão se encontrar, ou seja, quando tempo(t) é igual a 2h, os dois carros estarão no mesmo lugar, eles terão percorrido 100 km.

Durante o processo de modelagem matemática, é importante que os alunos validem o modelo construído, e transitar para outro registro de representação, além de oportunizar o melhor entendimento do problema, permite avaliar a solução do problema através de outra estratégia.

Figura 5: Representação algébrica do movimento dos carros.

$$Sgrupo = 0 + 50.t = 50.t$$

$$Sprof = 20 + 40.t$$

Encontro → $Sgrupo = Sprof$

$$50.t = 20 + 40.t$$

$$50.t - 40.t = 20$$

$$10.t = 20$$

$t = 2\ h$ → $Sgrupo = 50.t = 50.2 = 100\ Km$

Fonte: Os autores.

A Figura 5 mostra a representação algébrica usada para responder ao questionamento feito acerca do encontro do carro do grupo (S_{grupo}) com o carro da professora (S_{prof}). O encontro ocorrerá quando $S_{grupo} = S_{prof}$, ou seja, quando tempo(t) é igual a 2h, os dois carros estarão no mesmo lugar, eles terão percorrido 100 km.

Ao final da atividade, cada grupo apresentou a estratégia usada para resolver o problema proposto, mostrando os mapas, as tabelas, os gráficos, as funções horárias do movimento, os cálculos, além de informações turísticas sobre a cidade a ser visitada, incluindo horário e valor da passagem de ônibus.

No caso de Venda Nova do Imigrante, o grupo trouxe informações sobre a colonização italiana, a origem do nome da cidade, apresentando-a como a cidade berço de agroturismo no Brasil, envolvendo 70 propriedades, com 300 famílias e 1.500 pessoas diretamente atuantes, com destaque para a confecção artesanal e caseira de produtos típicos, principalmente na culinária (embutidos como o socol, doces, geléias, licores e biscoitos), além da tradicional e anual "Festa da Polenta".

Como os alunos estão ingressando numa turma de 1ª Série do Curso Técnico Integrado de Administração de Empresas, aproveitamos o momento da apresentação para fazer

algumas observações a respeito dessa habilidade, tendo como objeto de observação, o comportamento dos próprios alunos na apresentação do trabalho.

Esse momento se tornou muito rico, pois além de conscientizar os alunos para essa habilidade, eles mesmos ficaram atentos ao observar a própria prática no decorrer das apresentações dos trabalhos. Além de prestarem mais atenção às informações que os grupos traziam, os alunos ficaram muito atentos aos comportamentos dos colegas.

Entre as observações que foram discutidas pelo grupo, podemos citar:

a) A postura que o grupo deve ter a frente dos colegas durante a apresentação: apresentar olhando para os colegas da turma, evitar conversas paralelas enquanto um dos colegas está apresentando; estar atento à fala do colega, pois o que o colega esquecer, outra pessoa do grupo poderá complementar;

b) O conteúdo que será informado: não necessariamente tem que ser falado tudo que se sabe, mas que o que for citado deve ser falado com credibilidade;

c) Usar material como apoio, escolhendo palavras ou figuras para remeter a uma informação que deve ser comentada: evitar ler textos e ficar de costas para a turma.

4. Conclusão

Observamos que houve um grande envolvimento e comprometimento dos alunos durante toda a atividade, desde o processo de busca de informação até a apresentação final de cada grupo.

Observamos que a mobilização de mais de uma representação, proporcionou aos alunos uma melhor compreensão e interpretação dos dados do problema, mesmo com as dificuldades verificadas por alguns grupos, em realizar a conversão de uma representação para outra. Isso veio a reforçar a importância da utilização de mais de uma representação semiótica para uma melhor compreensão do objeto estudado pelo aluno.

Os alunos gostaram muito de como a atividade foi realizada, e se surpreenderam com as várias e belas atrações turísticas que o estado tem, e mais ainda, de saberem que elas estão muito próximas deles, e que são de fácil acesso.

5. Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2009.

O JOGO DO MILHO QUEIMADO COMO METODOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA INDÍGENA

Laira Lamburghini Ribeiro, Cláudia Araujo Lorenzoni, Lígia Arantes Sad

lairalbr@gmail.com

Resumo: Este trabalho é um relato de experiência sobre uma oficina realizada com professores tupinikim e guarani no município de Aracruz-ES no ano de 2017, em que se buscou abordar ideias matemáticas a partir de saberes indígenas. O texto tem por objetivo explicitar a importância de elementos culturais na educação matemática no contexto indígena, em específico o jogo, que é carregado de conhecimentos e saberes do povo, tentando assim, integrar as formas tradicionais desses povos de produzir conhecimento e as práticas educacionais formais, como sugere D'Ambrósio (1994). A oficina foi promovida pelo Programa Ação Saberes Indígenas na Escola, do Ministério da Educação, em parceria com o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Campus Vitória. Concordamos com D'Ambrósio (1994) sobre a importância do resgate de elementos culturais para a educação matemática indígena e o respeito às diferentes formas de produzir conhecimento e ainda com Octávio e Araújo (2015) quanto à importância da intencionalidade, do planejamento e da consciência do valor pedagógico, para que o jogo não fique perdido somente no lúdico e sem um objetivo claro e conciso do que se quer abordar através dele. Nesta oficina, nos propusemos a explorar um jogo tupinikim, que denominamos o Jogo do Milho Queimado (MAGALHÃES, 2007), e discutir, juntamente com os professores presentes, as possibilidades e potencialidades deste jogo como metodologia de ensino. O jogo consiste no lançamento, por dois ou mais participantes, de seis grãos de milho queimados em uma face com um graveto quente, em que ganha quem tiver mais faces queimadas para cima. Em diferentes momentos do jogo procuramos, por meio de discussões, percorrer os campos matemáticos – Números e Operações, Álgebra, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação – e lançando mão de alguns exemplos, instigar os professores a elaborarem novas propostas e indagarem sobre como isso aconteceria em sua realidade de aula. Separamos os professores em três grupos, professores de 1º ao 3º ano, professores de 4º ao 5º ano, e professores de 6º ao 9º ano, visto que as turmas nas aldeias são multisseriadas. Neste artigo relatamos sobre as discussões realizadas juntamente com os professores de 1º ao 3º ano. Durante a oficina, o primeiro momento foi para jogar com as regras originais propostas, para conhecer o jogo. Num segundo momento os professores começaram a mudar regras, criar ou adaptar para sua realidade. Por exemplo, as regras originais não eram suficientes para tratar de empates com muitas pessoas, ou o caso de grãos de milho que ficavam parcialmente virados, provocando indecisão quanto à face queimada estar visível. Por último discutimos alguns exemplos de problemas envolvendo o jogo e sobre como abordar matemática por meio dele. Toda essa experiência conversou com o que defendemos, pois, além de explorar um elemento cultural também possibilitou extrapolar o esperado dentro do que planejamos para uma aula de matemática.

Palavras Chaves: Educação Indígena. Etnomatemática. Jogos.

1. Introdução

Este trabalho é um relato de experiência sobre uma oficina realizada com professores tupinikim e guarani no município de Aracruz-ES no ano de 2017, em que se buscou abordar ideias matemáticas a partir de saberes indígenas. O texto tem por objetivo explicitar a importância de elementos culturais na educação matemática no contexto indígena, em específico o jogo, que é carregado de conhecimentos e saberes do povo, tentando assim, integrar as formas tradicionais desses povos de produzir conhecimento e as práticas educacionais formais, como sugere D'Ambrósio (1994). A oficina foi promovida pelo Programa Ação Saberes Indígenas na Escola, do Ministério da Educação, em parceria com o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Campus Vitória. Nesta oficina, nos propusemos a explorar um jogo tupinikim, que denominamos o Jogo do Milho Queimado (MAGALHÃES, 2007), e discutir, juntamente com os professores presentes, as possibilidades e potencialidades deste jogo como metodologia de ensino.

Neste artigo relatamos sobre as discussões realizadas juntamente com os professores de 1º ao 3º ano. Para isto, propusemos aqui um breve estudo sobre o jogo e suas possíveis contribuições para a educação matemática indígena, descrevemos a metodologia utilizada na oficina, alguns resultados e discussões, e por fim conclusões que obtivemos ao final desta pesquisa.

2. O Jogo na Educação Escolar Indígena

Partimos da premissa de que os jogos proporcionam aos alunos situações favoráveis para aprendizagens matemáticas visto que o desenvolvimento da criança pode ser entendido como um processo dialético, ou seja, "o desenvolvimento da capacidade de pensar e seu desenvolvimento social" (PAVEZI, 2012). E é em casa que se inicia esse desenvolvimento social, na infância em situações de brincadeira, onde oportuniza a criança a viver situações onde existe processo de formação de conceitos. Os jogos e as brincadeiras compõem as atividades principais da infância, defendido por Vigotski e seus companheiros, dentre outros autores.

O jogo e a brincadeira são atividade principais da criança que mobiliza aprendizagens e promove o desenvolvimento, visto que "o jogo não é um mundo de fantasia e convencionalismos, mas um mundo de realidade, um mundo sem convencionalismos, só que reconstituído por meios singulares"

(ELKONIN, 1998, p.319 apud NASCIMENTO, ARAÚJO, MIGUEIS, 2010, p. 121) e é a "forma pela qual a criança pode se apropriar cada vez mais desse mundo, aproximar-se cada vez mais dele" (NASCIMENTO, ARAÚJO, MIGUEIS, 2010, p.121).

O aluno se apropria da cultura, enquanto o professor se desenvolve mais por aprender melhores formas de estudar e se aprofundar no conceito a ser ensinado. Por isso a necessidade de uma atividade que oriente as ações e aumente a eficiência do ensino. Logo, essas situações desencadeadoras proporcionam ao professor e ao aluno o start para aprender e ensinar, vivenciar o problema já vivido pela comunidade e criar a necessidade de aprendizagem, que move o aluno a aprender no nível superior.

Sardinha (2010) destaca que embora tenha-se superado alguns obstáculos para acabar com a tentativa de anulação da cultura indígena, ainda hoje os índios lutam pela reafirmação de seus direitos e a construção de sua cidadania que leve em conta o contexto sociocultural.

Consideramos que a ciência matemática se manifesta na cultura pelas "manifestações de modos, de maneiras e estilos de explicar, de conhecer, de lidar com a realidade" (D'Ambrosio, 1994, p. 94-95). E a etnomatemática é um conhecimento capaz de prover ao indivíduo capacidade de "explicar, entender, conviver com sua realidade" (D'Ambrosio, 1994, p. 95) em âmbitos naturais, sociais e culturais. D'Ambrosio (1994) também afirma que o jogo pode ser um ambiente de ensino que desperta os interesses do aluno, considerando desde que seja culturalmente situado e contextualizado.

Defendemos juntamente com Sardinha (2010) a necessidade de uma educação intracultural e intercultural, ou seja, uma educação que permita a relação entre os indivíduos de uma mesma cultura e entre culturas diferentes.

3. Oficina: O Jogo do Milho Queimado

A oficina tinha como objetivo proporcionar a experiência de um "fazer matemático", procurando identificar possibilidades pedagógicas dos jogos indígenas. Era pertinente que os professores discutissem e refletissem sobre a importância deste jogo no contexto da escola indígena e ainda sua potencialidade. Para tanto, utilizamos o jogo tupinikin denominado por Magalhães (2007) como "O jogo do milho" e como aqui referenciaremos a ele, devido seu valor cultural. O milho é um alimento tradicional dos Guarani de acordo com Loureiro e Teao (2010).

Esta oficina aconteceu na Aldeia de Irajá, em Aracruz, Espírito Santo. Nela estavam presentes professores tupinikin e guarani das aldeias vizinhas e também equipe pedagógicas das escolas.

Segue a metodologia utilizada para o grupo específico de professores do 1º a 3º anos.

3.1 O "Jogo do milho"

Este jogo consiste em cada jogador escolher apenas seis grãos e os queimar em uma face, então os jogadores sentados em roda no chão, lançam os seus grãos e o jogador que tiver menos grãos queimados virados para cima deixa o jogo, até que reste apenas um jogador, o vencedor. Estes grãos escolhidos ao final do dia são lançados fora e no próximo dia, escolhem-se novos grãos.

Figura 15: Grãos queimados em uma face

Fonte: Os autores.

3.2 Metodologia da oficina com os professores de 1º a 3º anos

Planejamos proporcionar um tempo jogando a partir destas regras expostas, e depois a partir de fichas (Figura 2) com problemas matemáticos conduziríamos intervenções durante toda a oficina. Elas foram organizadas para abordar os campos matemáticos Números, Operações e Álgebra. O objetivo era que os professores indígenas baseados em suas próprias práticas de sala de aula e criatividade argumentassem sobre a relevância do jogo para o ensino e propusessem novas abordagens além das que sugeríamos a princípio.

Figura 16: Ficha Explorando o Jogo

Fonte: Os autores.

4. Resultados e Discussões

Os professores enquanto jogavam, pensando em sua realidade de sala de aula pontuaram questões importantes relativas ao jogo, como as peças do jogo serem pequenas e os alunos que poderia ocasionar um acidente, como lidar com as crianças que perdem e fica de fora do jogo, como gerir a sala com muitos alunos jogando. Entre as pontuações anotadas por eles, incluía trocar as peças (grãos de milho) por peças maiores como búzios, conchas que estão presentes no seu cotidiano e até mesmo podendo ser preparados por eles retratando uma relação com a terra e seu ambiente, citado também por Grando (2010, p. 26): "a criatividade dos indígenas na construção dos jogos e no uso de materiais encontrados somente na natureza circundante de suas terras deve ser registrada e ensinada aos não indígenas".

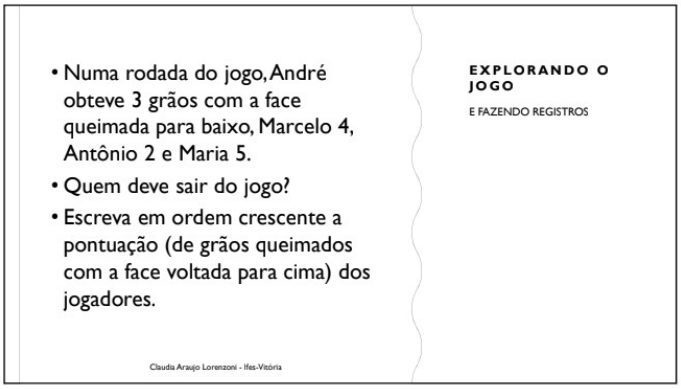
Puderam também perceber que este jogo pode contribuir para inserir todos, visto que não tem limite de jogadores; logo surgiu a ideia de organizar campeonatos ou até mesmo jogos paralelos com os alunos que perderiam como solução para que os alunos não ficassem sem atividade. Esta questão gerou muita discussão visto que não é da cultura indígena excluir e sim compartilhar, um professor comentou: "*o mundo indígena é diferente do capitalismo que não quer o individualismo, compartilhar, trabalhar junto*".

À medida que o grupo jogava, novas abordagens além da contagem foram surgindo por meio de discussões e mudanças de regras. As regras estabelecidas inicialmente pelo jogo não foram suficientes para lidar com as situações problemas que surgiam à medida que

se jogava. Então, valorizando esse pré-jogo, os professores refletiram sobre a dificuldade de se criar regras e modificar o jogo durante a atividade com os alunos e depois pensaram em maneiras e regras para que aquelas dificuldades não acontecessem em sala de aula. Exemplos de dificuldades com o jogo foram os grãos indecisos, que não tinha como definir queimado ou não, para isso criaram a regra de jogar novamente neste caso, trocando ou não de peça; no caso do empate os alunos decidiriam fazendo um jogo exclusivo com os que empataram. Neste sentido os professores concluíram que poderíamos modificar as regras para atender questionamentos e problemas que possivelmente poderiam acontecer em sala de aula, e que foi importante este momento de conhecer e explorar o jogo.

As fichas foram importantes para poder exemplificar situações diferentes que os professores poderiam abordar em sala de aula, como a ficha a seguir, que tinha como objetivo exemplificar uma situação que o jogo proporciona e a possibilidade de uma sistematização com os alunos de um sistema de contagem, ora indígena ora não indígena.

Figura 17: Ficha Explorando o jogo



Fonte: Os autores.

Professores destacaram:

> *"Uma coisa tão simples, como os seis grãos, abriu um leque grande de possibilidades".*
>
> *"(...) Na aldeia, as crianças aprendem a pescar, brincando de pescar. Aprendem a fazer casa, brincando de fazer casa. É assim com armadilhas e artesanatos".*

Podemos perceber que na preparação do material e neste fazer de conta imaginário que envolve a criança, é que a criança se apropria da atividade do adulto, reproduzindo e se constituindo humano. Na conclusão um professor comentou:

> *"os alunos precisam realmente de um ensino diferenciado e descontraído, pois as crianças aprendem muito através de brincadeiras".*

5. Conclusões

Concluímos que existe uma potencialidade no jogo como um recurso metodológico que extrapola o entretenimento e favorece o desenvolvimento superior. E que por meio deste, existe a possibilidade de uma valorização da Etnomatemática indígena que permite retomar processos de ensino próprios e que também permite a "intraculturalidade" e "interculturalidade", visto a importância da comunidade indígena também participar ativamente da comunidade exterior a ela, antes de tudo para se reservar de seus direitos e deveres, mas também para valorizar e divulgar sua riqueza de saberes e conhecimentos próprios.

Percebemos que a contextualização do jogo em meio à cultura local mobilizou os professores a quererem conhecer mais sobre o jogo, visto que era algo importante e não poderia ser esquecido. Eles puderam concluir que o jogo oportunizou a fala do pensamento, de exterioriza-lo; e muitas possibilidades foram encontradas pelos professores de conteúdos disciplinares para serem abordados por meio do jogo e de suas variações como ordem, comparação, operações básicas, registro escrito de pontuações e registro histórico do jogo, utilização de símbolos, oportunidade de incluir unidade e dezena nas regras.

E reflexões importantíssimas foram oportunizadas pelo jogo e pela ação em conjunto dos professores em busca da educação escolar indígena, por exemplo, a educação indígena inclusiva versus aquela que exclui, atenção aos materiais utilizados e a valorização da cultura local por meio destes, o jogo como uma metodologia de ensino que proporciona várias situações desencadeadoras de ensino.

Toda essa discussão é justificada pelo fato que a escola não é só uma instituição pedagógica e também uma instituição social, por isso entendemos que existe uma necessidade da elaboração de um currículo que atenda as especificidades culturais e sociais da comunidade indígena, visto que elas diferem em questões como língua, crenças e natureza (SILVA; SAD, 2012).

6. Referências

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In FERREIRA, M. K. L. **Com quantos paus se faz uma canoa!** A matemática na vida cotidiana e na experiência escolar indígena. MEC, 1994.

D'AMBROSIO, U**. A Etnomatemática no Processo de Construção de uma Escola Indígena.** Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 63, jul./set. 1994. p. 93-99. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1980/1949>. Acesso em 24 de maio de 2018.

GRANDO, Beleni Saléte (Org.). **Jogos e culturas indígenas:** possibilidades para a educação intercultural. Cuiabá: EdUFMT, 2010.

MAGALHÃES, D. R. de. **Concepções, crenças e atitudes dos educadores tupinikim frente à matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado) - Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

NASCIMENTO, Carolina Picchetti; ARAÚJO, Elaine Sampaio; MIGUEIS, Marlene da Rocha. O conteúdo e a estrutura da atividade de ensino na Educação Infantil: o papel do jogo. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria Histórico Cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010.

OCTÁVIO, L.S. ARAÚJO, E. S. A matemoteca escolar: paradigmas do jogo no ensino de matemática. **Rev. Teoria e Prática da Educação**, v. 18, n.2, p. 09-23, Maio/Agosto 2015. Disponível em: <https://bit.ly/2slWvc8>. Acesso em: 09 de março de 2018.

PAVEZI, Marilza; LIMA, Laíse Soares. **O papel da brincadeira e do brinquedo no desenvolvimento e aprendizagem da criança.** Campinas: 2012. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/seminario/seminario9/PDFs/3.58.pdf >. Acesso em: 21 de julho de 2017.

SARDINHA, Ana Gabriella de Oliveira; GASPAR, Maria Terezinha Jesus Gaspar. **Jogos indígenas aplicados ao ensino de matemática**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Pôster. Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010. Disponível em: < http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PT/T22_PT108.pdf>. Acesso em: 04 de junho de 2018.

SILVA, Circe Mary Silva da; SAD, Ligia Arantes. **The transformation of knowledge through cultural interactions in Brazil:** the case of the Tupinikim and the Guarani. In: RENN, Jürgen (ed.). The globalization of knowledge in History. Berlin: Max Planck, 2012.

O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL NO ESTUDO DE SÓLIDO ARQUIMEDIANO

Ranna de Jesus Ambrosio, Anna Carolline Pessoa de Mello Bitão, Lívia Azelman de Faria Abreu, Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues

Resumo: Analisando historicamente o ensino de Matemática, é possível observar que este tem se apropriado de diversas novas tecnologias a fim de obter melhores resultados, ser mais acessível e prazeroso. O cenário atual das aulas, não só de Matemática, conta com professores preocupados com o cotidiano e a vivência do aluno. Desta forma, o ensino passa a ser instigador da criticidade e deixa de lado o aspecto puramente bancário, ou seja, depositário de teorias e sacador de conteúdos meramente decorados. Se tratando das novas tecnologias nos quais os professores de Matemática têm buscado esse auxílio, pode-se destacar o uso da impressão 3D que permite a visualização tátil dos elementos que estão em estudo. Esta tecnologia vem passando por um processo de popularização nos últimos anos e tem, aos poucos, se mostrado presente nas escolas. Visando a praticidade e a facilidade do uso da impressão 3D, este projeto busca pesquisar materiais e métodos que utilizam desta tecnologia e tornam o estudo da Matemática adequado para um público muito maior de alunos. O uso do material concreto vem ao encontro do desejo de muitos professores de tornar sua aula mais dinâmica e participativa. Portanto, acredita-se que o material manipulativo seja um grande aliado no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Daí a ideia de se unir a tecnologia com a necessidade de construção de materiais concretos. Os materiais construídos nas impressoras 3D apresentam durabilidade, baixo custo, além da precisão. Sendo assim, uma primeira proposta foi desenvolvida no Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro e aplicada por meio de uma sequência didática sobre o Icosaedro Truncado (sólido arquimediano) e a presença dessa estrutura geométrica na química e no esporte, em que os alunos puderam experimentar e montar um sólido utilizando peças produzidas em uma impressora 3D. Esta aula foi aplicada para uma turma de segundo ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro e na visão da professora regente, os resultados obtidos são satisfatórios pelo que se propõe a aula. Com base em estudos bibliográficos e por meio da observação dos resultados obtidos em aula, é possível legitimar a importância desse recurso na valorização das aulas de Matemática. Como continuação da pesquisa, pretende-se construir mais peças com o auxílio da impressora 3D e apresentar novas propostas metodológicas.

Palavras Chave: Impressão 3D. Ensino de Matemática. Material concreto.

1. Introdução

O mundo hoje é marcado por constantes evoluções tecnológicas nas mais amplas áreas. Esse constante progresso resultou em um novo modelo de sociedade com indivíduos

onde a manipulação de recursos tecnológicos é inerente de cada ser.

> Essa geração nasceu, cresceu e se desenvolveu em um período de grandes transformações tecnológicas e, por suas correlações com esse meio digital, adquiriram competências e habilidades que lhes permitem desenvolverem diferentes atividades a partir desses novos meios de comunicação tecnológica. (COELHO, 2012, p. 90).

Na atual sociedade em que os jovens nasceram com as tecnologias digitais tão presentes, é importante que os indivíduos mediadores do conhecimento busquem se empenhar em converter as tecnologias em auxiliadores no processo de ensino e aprendizagem.

> Com os avanços da Internet, as escolas tiveram que reorganizar a maneira como ensina(va)m. Para o desenvolvimento das competências e habilidades dessa nova geração de nativos digitais, a escola teve e tem que se reestruturar, pedagógica e fisicamente. Portanto, professor educador e aluno precisam dialogar, pois neste novo formato educacional ambos têm vez e voz. (COELHO, 2012, p. 89).

Este artigo tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino sobre o Icosaedro Truncado, um sólido arquimediano, fazendo uso de material manipulável produzido por meio de impressão 3D. Essa proposta foi desenvolvida no projeto de pesquisa Construção de Materiais Didáticos e Propostas Metodológicas para o LEAMAT - Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática, que iniciou a partir da aspiração de profissionais da educação em fortalecer o interesse dos alunos do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense pela Matemática. Materiais manipuláveis estão sempre presentes nas atividades desenvolvidas neste projeto pela capacidade de atingir o aluno de uma maneira diferente, como afirmam Santos e Cury:

> O material manipulável pode ser utilizado no momento da introdução de certo conteúdo, vindo a ser um aliado para o professor em sua explicação. Seu uso é justificado pela possibilidade de tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e atrativas para os estudantes, o que contribui para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem. (SANTOS; CURY, 2011, p. 03).

Neste âmbito, o trabalho aqui relatado se propõe desenvolver o reconhecimento das especificidades do objeto em estudo, o Icosaedro Truncado, bem como afirmar a presença de propriedades, como a validade do teorema de Euler para este sólido. Dentre as diversas possibilidades para confecção de materiais manipuláveis, destacou-se, neste projeto, a utilização da impressão 3D, que é uma tecnologia que já vem sendo utilizada desde o

final dos anos oitenta e vem se desenvolvendo a cada ano.

De acordo com Porto (2016),

> A tecnologia das impressoras 3D, também chamadas de máquinas de Prototipagem Rápida, vem se desenvolvendo ao longo do tempo e mudando o modo de fabricação de objetos. Já existem uma variedade de métodos de impressão, e cada um trabalha de forma distinta e utiliza matérias próprios. Algumas impressoras extrudam plástico derretido em camadas para fazer os objetos, enquanto que outras usam *laser* para endurecer camadas de resina ou pó, de forma que o produto surja de um banho de matéria-prima. (PORTO, 2016, p. 9).

No início da utilização dessa impressão, esta era empregada na fabricação de peças automobilísticas. Com o sucesso da fabricação de protótipos na indústria automotiva, várias outras indústrias se apropriaram desta tecnologia para também desenvolver modelos prévios para análise. A popularização da impressão 3D alcançou também a extensão medicinal e posteriormente a educacional. A tecnologia 3D se destaca ainda por produzir materiais duráveis e de alta qualidade.

É importante ressaltar que os materiais e propostas produzidas neste projeto, advém de necessidades apontadas por professores do IFFluminense, uma vez que foi feita uma pesquisa em formato de questionário que identificou os conteúdos que, segundo os professores, apresentam maior dificuldade para ser trabalhado.

A impressão 3D permite a materialização de objetos que, talvez, ficassem somente no campo da abstração, mas que com a manipulação seja possível um melhor desenvolvimento da compreensão de entes matemáticos.

Foi pensando no desenvolvimento das competências e habilidades dos alunos do Instituto que este projeto iniciou suas atividades com levantamento de dados sobre outros laboratórios de Matemática em todo o Brasil, seja em universidades públicas, como também em Institutos Federais. Esse levantamento serviu para comparar os materiais já existentes no LEAMAT do IFFluminense *campus* Campos Centro com os que poderiam ser produzidos. Primeiramente, foi feito um estudo bibliográfico sobre a importância da utilização de material manipulativo no processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, foi possível conferir a validade deste material como colaborador na produção de conhecimentos em sala de aula.

Para essa aula, optou-se pelo trabalho em grupo, pelo fato de promover autonomia, pensamento crítico e cooperação, como defendem Torres e Irala (2014):

> A aprendizagem colaborativa e a aprendizagem cooperativa têm sido frequentemente defendidas no meio acadêmico atual, pois se reconhece nessas metodologias o potencial de promover uma aprendizagem mais ativa por meio do estímulo: ao pensamento crítico; ao desenvolvimento de capacidades de interação, negociação de informações e resolução de problemas; ao desenvolvimento da capacidade de autorregulação do processo de ensino-aprendizagem. (TORRES; IRALA, 2014, p. 01)

2. Material e Métodos

O ponto de partida para a produção da sequência didática sobre o Icosaedro Truncado se deu por anseio das orientadoras do projeto em trabalhar um conteúdo matemático, que apesar de não estar presente na ementa do curso de Ensino Médio da Instituição, possui relação com o cotidiano dos alunos e este fato poderia lhes causar uma motivação para o estudo de Geometria Espacial.

Após a escolha do Icosaedro Truncado como objeto de estudo, o núcleo envolvido no projeto se voltou para estudar o sólido, as propriedades e características do mesmo. A partir disso, foi desenvolvida uma sequência didática que perpassa pelo estudo matemático do sólido arquimediano, a presença desta estrutura em esfera esportiva e interdisciplinaridade entre Matemática e Química.

No que se refere ao material utilizado, foram produzidos Icosaedros com canudos plásticos e Icosaedros Truncados, segundo modelo já existente no *site* <https://www.thingiverse.com/>, utilizando uma impressora 3D.

A sequência didática foi testada com o intuito de avaliar a validez da mesma. Pelo fato de uma das orientadoras do projeto ser professora regente de turmas do segundo ano do Ensino Médio no IFFluminense, foi fácil a escolha do público-alvo que satisfizesse as necessidades de pré-requisitos para a execução da atividade.

No início da aula, a turma foi dividida em grupos. Pensou-se nesse modo de trabalho, primeiro por não haver material para que trabalhassem individualmente, e pelo fato do trabalho em grupo promover a conversa, que permite que os alunos percebam as situações propostas por outras perspectivas, além de possibilitar que a resolução possa ocorrer de forma ampla e mais completa.

É fato que, por vezes, a linguagem ou o modo de abordagem no ensino de Matemática empregado pelo professor não alcance os alunos em sua totalidade, mas trabalhando em grupo é possível que aqueles que não foram anteriormente atendidos alcancem a compreensão do problema e sua solução através da explicação de um colega.

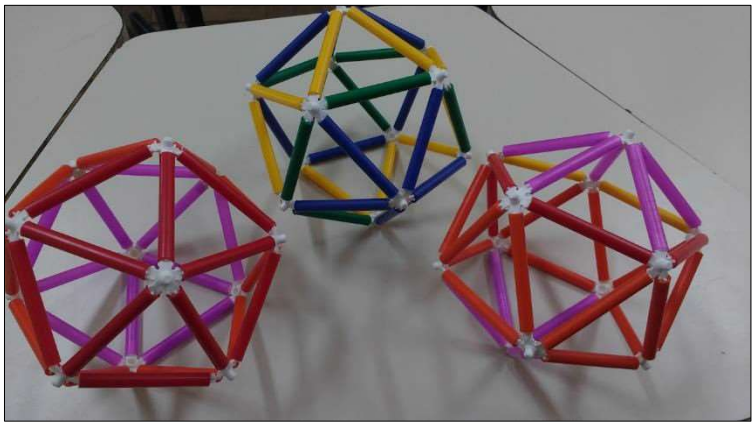
Para a introdução do tema, uma bola de futebol (Figura 1) foi mostrada e os alunos foram levados ao questionamento: e se esvaziarmos a bola até que as figuras que observamos estejam planas? Então os alunos perceberam e comentaram que encontraríamos hexágonos e pentágonos.

Figura 1: Bola de Futebol

Fonte: Os autores.

Nesse momento, foi exposto um Icosaedro regular (Figura 2) e discutida as propriedades dele, como número de vértices, arestas e faces. Algumas perguntas foram feitas para os alunos, tais como: Quais os polígonos que formam esse sólido? Existe a validade da relação de Euler para esse sólido?

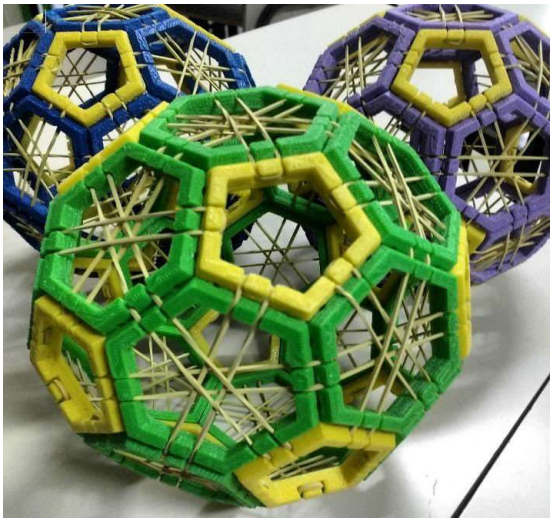
Figura 2: Icosaedros regulares.



Fonte: Os autores.

Após este estudo, foi apresentado aos alunos um Icosaedro Truncado, impresso em impressora 3D, feito a partir de cortes piramidais nos vértices desse sólido (Figura 3), que é conhecido como sólido arquimediano.

Figura 3: Icosaedros truncados.



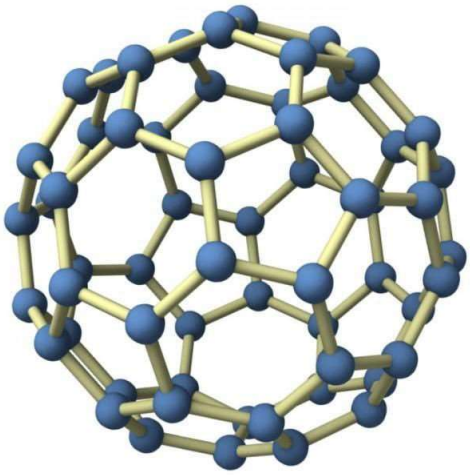
Fonte: Os autores.

Então foi direcionada aos alunos a seguinte pergunta: Com o que se parece este sólido? Os alunos corretamente responderam que parecia a bola de futebol levemente esvaziada.

Da mesma forma que foram estudadas as propriedades do Icosaedro, o mesmo foi feito com o Icosaedro Truncado. Primeiramente, explicamos que cada vértice do sólido platônico é substituído por cinco vértices no sólido arquimediano com o acréscimo de uma face. Partindo dessas propriedades e aplicando a Relação de Euler foi possível descobrir o número de arestas do Icosaedro Truncado. As arestas também foram contadas uma a uma, deste modo verificou-se que o número antes encontrado coincidia com o da contagem. Os alunos chegaram a conclusão de que a Relação de Euler também vale para este sólido.

Essa proposta mostrou que a Matemática está muito mais no cotidiano do que imaginamos. Para reafirmar que a Matemática não é uma disciplina isolada, mostramos que existe uma estrutura atômica que possui a aparência do Icosaedro Truncado. Esta estrutura se chama *buckminsterfulereno*, *bucky*-bolas, ou apenas fulereno (Figura 4), fruto de ligações entre 60 átomos de carbono e considerada a terceira ligação carbônica mais rígida que existe, perdendo apenas para o diamante e para o grafite.

Figura 4: Fulereno.



Fonte: https://bit.ly/2HmZaqG

Ao final da aula, os alunos montaram, em grupos, o Icosaedro Truncado utilizando as peças impressas em impressora 3D e ligas de elástico.

3. Resultados e Discussões

A partir de estudos bibliográficos foi possível depreender a importância da utilização de material manipulável no processo de desenvolvimento de saberes. O material concreto se constitui em uma ferramenta que garante a abstração dos conceitos teoricamente aprendidos. Tal abstração não precisa ser feita em momento posterior ao conceitual. Na sequência didática relatada nesse artigo, esta acontece em um momento conjunto ao de conceitualização, proporcionando a visualização do que era explicado.

Esta sequência foi aplicada em forma de minicurso no Festival da Matemática em abril de 2017, na Escola Sesc de Ensino Médio. A partir dessa aplicação, é possível afirmar, também, que este tema não é apenas significativo para alunos da segunda série do Ensino Médio. É um conteúdo que pode ser trabalhado até com alunos do Ensino Fundamental utilizando os materiais aqui citados.

4. Conclusões

Na sequência apresentada, foi possível mostrar que estruturas estudadas na Matemática não ficam restritas a esse cenário, também é possível notá-las, como no caso do Icosaedro Truncado, no esporte, quando observada uma bola de futebol ou na

química, em uma estrutura molecular. Os conceitos trabalhados nessa sequência envolvem sua construção a partir do truncamento de um Icosaedro e a comprovação da validade do Teorema de Euler para o Icosaedro Truncado.

A partir da análise dos resultados obtidos em aula, é possível legitimar a importância desse recurso, material concreto, na valorização das aulas de Matemática.

5. Referências Bibliográficas

COELHO, P. M. F. **Os nativos digitais e as novas competências tecnológicas.** Texto Livre, v. 1983-3652, p. 2-9, 2012. v. 5. n. 2. Disponível em:

<http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/textolivre/article/viewFile/2049/7254>. Acesso em: 27 maio 2018.

PORTO, T. M. S. **Estudo dos avanços da tecnologia de impressão 3d e da sua aplicação na construção civil.** 2016. Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em:

<http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10019793.pdf>. Acesso em: 03 jun. 2018.

SANTOS, D. C.; CURY,H.N. **O uso de Materiais Manipuláveis como ferramenta na Resolução de Problemas Trigonométricos**. Vidya (Santa Maria), v. 31, p. 49-61, 2011. Disponível em:

<http://sites.unifra.br/Portals/35/vydia%202011/o%20uso%20de%20materiais%20manipul%C2%A0veis.pdf>. Acesso em: 28 maio 2018.

TORRES, P. L.; IRALA, E. A. F. Aprendizagem Colaborativa: Teoria e Prática. In: TORRES, P. L. (Org.). **Complexidade:** Redes e Conexões na Produção do Conhecimento. 1ª ed.Curitiba: SENARPR, 2014, v. 1, p. 61-93. Disponível em:

<http://www.agrinho.com.br/site/wp-content/uploads/2014/09/2_03_Aprendizagem- c

O USO DO GEOGEBRA COMO RECURSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA: DESCOBRINDO A SEMELHANÇA DE FIGURAS

Gabriel Abreu Moreira, Felipe Avelino De Souza, Bruna Beraldo de Souza, Sandra Maria de Souza Silva, Ráira Graziela Manhães Carvalho, Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues, Vanice da Silva Freitas Vieira

Resumo: A Geometria proporciona a exploração de situações-problema que permitem o desenvolvimento da capacidade do aluno argumentar e construir conceitos. Dessa maneira, o aluno pode transportar o conhecimento teórico adquirido em sala de aula para a sua realidade, e, assim, a Geometria cumpre o seu papel de integrar e ampliar a visão do mundo. Para isso, faz-se necessário que a Geometria seja abordada de maneira diferente, tornando-se mais concreta, dinâmica e prazerosa e, ao mesmo tempo, proporcionando uma aprendizagem mais significativa, partindo de situações e recursos presentes no dia a dia do aluno. Visando inovar a forma que a Geometria é abordada nas salas de aulas, as Tecnologias Digitais é um dos recursos que estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas, desse modo, destaca-se o uso de softwares no Ensino da Matemática com objetivo de facilitar a compreensão dos conteúdos pelos alunos, como exemplo, temos o Geogebra, que ganha destaque devido a possibilidade de trabalhar aspectos algébricos, geométricos e aritméticos de forma integrada. Diante disso, este trabalho consiste em apresentar o resultado da aplicação de uma sequência didática da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFFluminense). A referida sequência tem como objetivo instigar o aluno a compreender o conceito de semelhança de figuras planas quaisquer, por meio do uso do software GeoGebra. A sequência didática foi aplicada no dia 27 de novembro de 2017, no IFFluminense, para alunos da primeira série do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Mecânica e foi dividida em três etapas. Inicialmente, introduzimos o conteúdo de semelhança a partir de duas figuras com tamanhos diferentes, mas que mantinham as proporções de suas dimensões, e applets compostos por trapézios e triângulos semelhantes. Em seguida, foi proposta uma atividade investigativa na qual permitiu que os alunos manuseassem o applet que continha dois polígonos semelhantes quaisquer, movimentar os vértices de sua escolha e descrever o que estava sendo observado de acordo com as questões da atividade proposta. Por fim, os alunos resolveram exercícios para a fixação do conteúdo ensinado. De modo geral, considera-se que a experimentação obteve sucesso, visto que os objetivos foram alcançados, e vale ressaltar que no decorrer da sequência foi perceptível o interesse por parte dos alunos. Ao final da aplicação os alunos manifestaram oralmente a sua satisfação pelas atividades realizadas, afirmando que haviam aprendido o conteúdo de semelhança e o quanto foi importante o uso do tablet, pois possibilitou uma aula mais dinâmica e atrativa.

Palavras Chave: Geometria, Tecnologias Digitais, Geogebra.

1. Introdução

Este artigo tem como objetivo apresentar o resultado, que foi avaliado de maneira qualitativa, da aplicação de uma sequência didática desenvolvida no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT), na linha de pesquisa de Geometria, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense.

O LEAMAT é um componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense que se desenvolve em três semestres com quatro linhas de pesquisa, sendo estas: Álgebra, Aritmética, Educação Matemática Inclusiva e Geometria.

Durante esses três semestres escolhemos um tema para ser abordado em cada linha de pesquisa, defendemos esse tema a partir de autores e desenvolvemos as sequências didáticas para aplicarmos na turma regular.

Escolhemos o tema de semelhança de figuras planas quaisquer a partir do uso da tecnologia, de forma que a sequência didática se tornasse mais atrativa e dinâmica, almejando uma maior participação dos alunos pois se trata de uma atividade investigativa.

2. Justificativa

A Geometria proporciona a exploração de situações-problema que permitem o desenvolvimento da capacidade de o aluno argumentar e construir conceitos. Dessa maneira, o aluno pode transportar o conhecimento teórico adquirido em sala de aula para a sua realidade, já que a Geometria se faz presente no cotidiano das pessoas, desde do tempo em que estas começam a ver, a se movimentar no espaço, a seguir determinada direção, a se localizar ou localizar e sentir objetos a sua volta, tornando-se indispensável o seu conhecimento.

Apesar da reconhecida importância, Fonseca (1997, apud, Nascimento; Rehfeldt; Quartieri, 2016, p.117) ressalta que ultimamente o ensino da Geometria não tem recebido a devida atenção, provavelmente pelo fato do conteúdo ficar para o fim do ano letivo e ainda não ser aplicado de forma completa, levando em consideração a complexidade do conteúdo e o pouco tempo para ser trabalhado. Nesse sentido, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) relatam que a Geometria é fundamental para os alunos desenvolverem pensamentos que os permitem interagir com mundo em que estão inseridos, bem como retratam a pouca relevância dessa área nas

aulas de Matemática e, além disso destacam que seu ensino é confundido com o das medidas.

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que, possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever, e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p.122).

As ideias de Lorenzato (1995) alinham-se com as de Fonseca (1997), quando este afirma que o ensino da Geometria não deve ser esquecido, justificando a necessidade do seu estudo pela importância desta área no cotidiano e ratifica seu papel essencial no desenvolvimento da habilidade de pensar, raciocinar para ler e interpretar as situações do mundo.

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p.5).

Visto a importância do estudo da Geometria e seus respectivos conteúdos, Maciel (2004), após ter analisado artigos e dissertações em Educação Matemática, aponta a dificuldade do ensino do conteúdo de semelhança, quando se trata da compreensão dos alunos. Sendo assim:

> No ensino atual, geralmente para o aluno, o conceito de semelhança surge como conteúdo sem sentido, uma vez que é introduzido sem nenhuma ligação com a vida cotidiana. O conceito de semelhança é um dos conteúdos que permite compreender e interpretar fenômenos naturais (MACIEL, 2004, p. 19).

Entende-se que a Geometria para cumprir seu papel de integrar e ampliar a visão do mundo, necessita ser abordada de maneira diferente, se tornando mais concreta, dinâmica e prazerosa, ao mesmo tempo proporcionar uma aprendizagem mais significativa, partindo de situações e recursos presentes no dia a dia do aluno.

Um dos recursos que estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas são as tecnologias digitais. O uso de computadores, calculadoras, *tablets*, *smartphones*, dentre outras tecnologias estão cada vez mais presentes nas salas de aula. Devido a este fato, é necessário que haja uma preparação dos professores para que utilizem estas tecnologias como ferramenta na educação. De acordo com Pocho (2003):

> Para que o professor utilize as tecnologias com o objetivo de facilitar a aprendizagem, como instrumento para construção do conhecimento e democratização ao acesso do uso dos novos produtos tecnológicos, é necessário que ele domine o uso da máquina e também a sua utilização pedagógica (POCHO, 2003, p. 14).

Dentre as tecnologias digitais destaca-se o uso de *softwares* no ensino da Matemática com objetivo de facilitar a compreensão dos conteúdos pelos alunos. Faria (2016) ressalta que o *software* Geogebra ganha destaque devido a possibilidade de trabalhar aspectos algébricos, geométricos e aritméticos de forma integrada e ainda afirma que:

> Alguns aspectos favoreceram a escolha do GeoGebra para realização das atividades. Um deles é que se trata de um software de fácil acesso e manuseio, visto que está disponível de forma gratuita para diversos sistemas operacionais, e possui uma interface amigável (FARIA, 2016, p. 39).

Diante do exposto, percebe-se que a Geometria é um campo da Matemática que precisa de uma atenção especial. Acredita-se que as tecnologias digitais, são ótimas ferramentas para se utilizar no ensino de Geometria, no caso especifico o uso do *software* Geogebra no ensino de semelhança das figuras planas. E, ainda, quando este conteúdo é trabalhado de forma com que o aluno consiga relacionar a matéria aprendida com a sua vida do cotidiano, poderá contribuir para uma aprendizagem significativa.

A compreensão dos conteúdos relacionados a Grandezas e Medidas é fundamental para a atuação do aluno no mundo, pois estão presentes no cotidiano das pessoas. Lima e

3. Aplicação da sequência didática na turma regular

Para que pudéssemos alcançar nosso objetivo de apresentar uma proposta de trabalho que facilitasse o aprendizado do conceito das grandezas geométricas área e perímetro,

A sequência didática foi aplicada no dia 27 de novembro de 2017, para uma turma da primeira série do ensino médio, composta por trinta e três alunos, no Instituto Federal Fluminense, na cidade de Campos dos Goytacazes, com uma duração de três aulas de 50 minutos.

Para esta sequência, utilizamos tablets disponibilizados pelo Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE) da própria instituição, este laboratório fornece recursos aos licenciandos dos diversos cursos de licenciatura do campus.

Cabe destacar que no LEAMAT II, aplicamos essa sequência para a nossa própria turma, sendo assim, a turma, juntamente com as orientadoras, sugeriu alterações necessárias para que não houvesse nenhum imprevisto no dia da aplicação que aconteceria no próximo semestre no LEAMAT III. Por esse fato, não houve necessidade de nenhuma mudança no planejamento inicial das aulas.

Iniciamos a sequência didática distribuindo as apostilas e os tablets que foram usados durante a aplicação e pedimos que eles formassem duplas. Após isso, introduzimos o conteúdo de semelhança a partir de duas figuras de globos terrestres com tamanhos diferentes, porém mantendo as proporções de suas dimensões. Em seguida, foi pedido que eles abrissem o applet "Trapézio semelhante" e movimentassem um dos vértices de um dos trapézios para que pudessem observar e responder o que estava sendo solicitado. Não houve dificuldade dos discentes ao preencherem as medidas dos ângulos, dos lados e as razões entre os lados correspondentes dos trapézios semelhantes.

Logo após, foi escolhido um aluno para que ele falasse as medidas dos lados dos trapézios que foi manipulado por ele, dessa forma foi mostrado que independente das diferentes medidas dos lados dos trapézios dos outros alunos, as razões entre os lados correspondentes continuavam a mesma, pois os trapézios mudavam na mesma proporção, concluindo com eles, por meio da investigação, a definição de polígonos semelhantes e razão de semelhança.

Da mesma forma que foi realizado com o applet anterior, foi solicitado que os alunos abrissem o applet "triângulos semelhantes", movimentassem os triângulos e respondessem o que estava sendo solicitado. Pedimos que outro aluno falasse as medidas

dos lados e ângulos dos triângulos após ter sido movimentado por ele. Desse modo, foi mostrado que independente das diferentes medidas dos lados dos triângulos criados pelos alunos da turma, as razões de semelhança entre os lados correspondentes permaneciam as mesmas entre si, logo os triângulos eram semelhantes.

A partir da investigação anterior, também foi explicado para os alunos os três casos de semelhança de triângulos (Figura 1): ângulo-ângulo (AA), lado-ângulo-lado (LAL) e lado-lado-lado (LLL). Os alunos não apresentaram dificuldade nessa parte da experimentação.

Figura 1 – Explicação do conteúdo

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dando continuidade a sequência didática, foi pedido aos alunos que abrissem o applet "Poligonos semelhantes" (Figura 2) para realizarem a atividade 1 que também era investigativa. Na referida atividade, foi solicitado aos alunos que desmarcassem todas as opções e que movimentassem os vértices de acordo com o que estava sendo pedido nos enunciados.

Vale ressaltar que nessa etapa da aula, foi necessário um maior auxílio por parte do grupo, pois os alunos não estavam habituados a fazerem esse tipo de atividade investigativa e apresentavam dificuldade para transcrever o que eles estavam observando no applet.

Na segunda questão da atividade 1, os alunos não encontraram de imediato a relação entre os lados correspondentes, devido a isso, fizemos algumas perguntas para que eles pudessem pensar e perceber que enquanto as medidas dos lados do polígono 1 aumentavam ou diminuíam, as medidas dos lados correspondentes no polígono 2 também aumentavam ou diminuíam proporcionalmente.

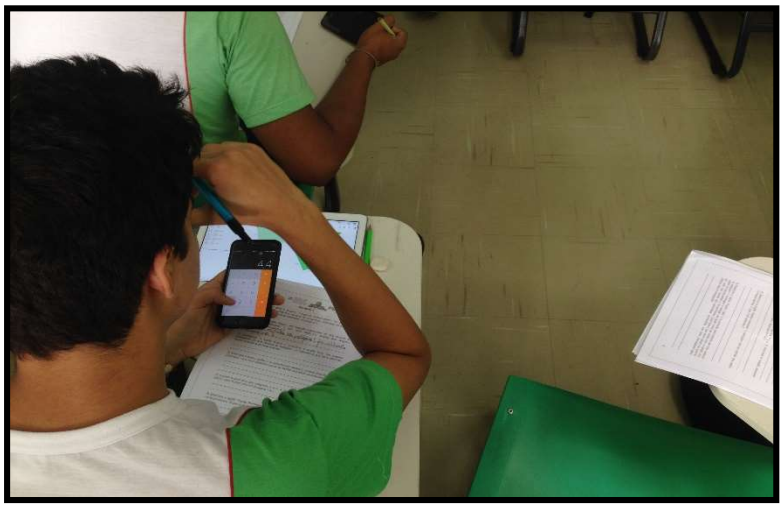
Figura 2 – Aluno com o Applet

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta questão, os alunos conseguiram calcular sem dificuldade o perímetro dos polígonos 1 e 2, porém não conseguiram descrever a relação que estava sendo pedida e novamente os fizemos pensar por meio de perguntas para que eles entendessem que era necessário calcular a razão entre os perímetros.

A sexta questão, foi a que os alunos apresentaram mais dificuldade pois exigia um maior raciocínio para encontrar a relação que existia entre a razão das áreas e as razões entre os lados correspondentes e dos perímetros. Dessa maneira, pedimos que eles utilizassem a calculadora (Figura 3) e verificassem por tentativa se a razão entre as áreas era o dobro, triplo, quadrado ou o cubo das razões entre os lados correspondentes e dos perímetros.

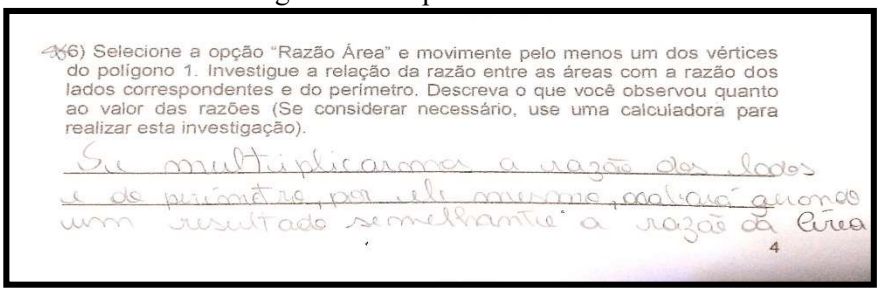
Figura 3 – Aluno resolvendo a questão



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por se tratar de uma atividade investigativa os alunos necessitaram de um maior tempo para resolver as questões, por esse motivo, nem todos os alunos conseguiram finalizar a sétima questão e foi necessário realizar a correção juntamente com a turma, sempre pedindo para que falassem suas respostas e dizendo-lhes que não era preciso apagar, apenas comparar e complementar, quando necessário, o que eles já haviam escrito. Apresenta-se a seguir a resposta de um dos alunos (Figura 4).

Figura 4 – Resposta do aluno


6) Selecione a opção "Razão Área" e movimente pelo menos um dos vértices do polígono 1. Investigue a relação da razão entre as áreas com a razão dos lados correspondentes e do perímetro. Descreva o que você observou quanto ao valor das razões (Se considerar necessário, use uma calculadora para realizar esta investigação).

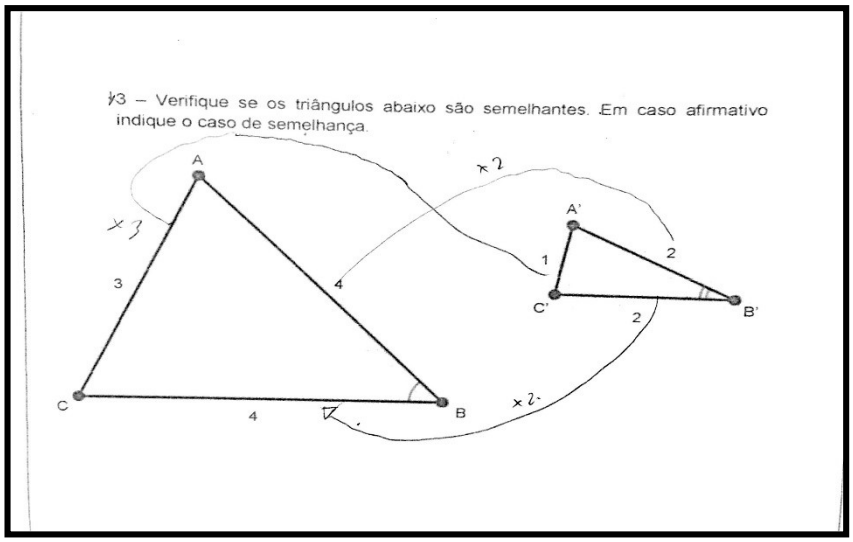
Se multiplicarmos a razão dos lados e do perímetro, por ele mesmo, maior quando um resultado semelhante a razão da área

4

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para realizar a atividade 2, composta por exercícios de fixação e aplicação do conteúdo ensinado, foi necessário um terceiro tempo de aula. Chegamos à sala novamente, e foi solicitado que os alunos respondessem as três questões da atividade. Os alunos não apresentaram dificuldade ao resolver as questões e nessa parte dos exercícios não houve uma necessidade de auxiliá-los, pois os alunos demonstraram uma maior facilidade. Pode-se observar abaixo (Figura 5), a forma que o aluno relacionou os lados correspondentes dos triângulos.

Figura 5 – Resposta do aluno



Fonte: Protocolo de pesquisa

4. Considerações Finais

De modo geral, consideramos que a experimentação obteve sucesso visto que os objetivos foram alcançados, inclusive, no decorrer da aplicação da sequência foi perceptível o interesse por parte dos alunos.

Ao final da aplicação, os alunos manifestaram oralmente a sua satisfação pelas atividades realizadas, afirmando que haviam aprendido o conteúdo de semelhança e ainda ressaltaram o quanto foi importante o uso do tablet para uma melhor visualização desse conteúdo da geometria, possibilitando uma aula mais dinâmica e atrativa.

A utilização de aplicativos computacionais, como softwares educacionais na educação pode gerar uma aproximação entre a teoria e prática, tornando-se um instrumento de ensino-aprendizagem que auxilia o professor e aproxima o aluno de sua realidade, já que a tecnologia está tão presente no cotidiano dos estudantes.

É válido destacar que a disciplina LEAMAT como componente curricular do curso de licenciatura em Matemática, propicia ao aluno uma experiência da prática docente, antes mesmo do estágio, de forma que o mesmo faça uma relação, desde os períodos iniciais, entre a teoria e a ação.

Deixamos como sugestão para trabalhos futuros trabalhar a semelhança de figuras entre fotografias e também a razão entre os volumes de figuras planas quaisquer comparando com a razão entre as áreas e entre os lados correspondentes.

5. Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2017.

FARIA, R. W. S. C. **Raciocínio Proporcional:** Integrando Aritmética, Geometria e Álgebra com o Geogebra. 2016. 278 f.. Tese (Doutorado em Educação Matemática),

Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016. Disponível em: < https://goo.gl/1gorRR>. Acesso em: 14 mar. 2017.

FONSECA, S. **Metodologia de Ensino:** Matemática. Belo Horizonte: Editora Lê: Fundação Helena Antipoff, 1997.

LORENZATTO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, nº. 4, p. 3-13. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

Disponível em: <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf> Acesso em: 22 fev. 2017

MACIEL, A. C. **O Conceito de Semelhança:** Uma proposta de Ensino. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-15T11:26:49Z-3505/Publico/dissertacao_alexsandra_camara_maciel.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2017.

NASCIMENTO, J.B.S; REHFELDT, M.J.H.; QUARTIERI, M.T. **Construção de Figuras Geométricas Planas com Materiais Alternativos**. **Signos**, Lajeado, ano 37, n. 1, p. 115-131. 2016. Disponível em: <https://goo.gl/snz2ob>, Acesso em: 23 fev. 2017.

POCHO, C. L.; AGUIAR, M. M.; SAMPAIO, M. N.; LEITE, L. S. (coord.). **Tecnologia Educacional:** Descubra suas possibilidades na sala de aula. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO VIRTUAL PARA A APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO

Glaziela Vieira Frederich, Sandra Aparecida Fraga da Silva

glazi.frederich@gmail.com

Resumo: Trata-se de um relato de experiência fruto de uma intervenção pedagógica, realizada em uma instituição pública de ensino situada no município de Vitória - ES. Teve por objetivo a utilização de recursos digitais para explorar o conceito de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas bem como sua integração no processo de ensino e aprendizagem por alunos do 7° ano do ensino fundamental. Pretendeu-se utilizar o software geoplano virtual como recurso diferenciado para desenvolvimento de atividades matemáticas, de forma criativa e eficaz. Apresentamos suas potencialidades durante a aula e ainda dados relativos a intervenção pedagógica, análise da tarefa proposta e desempenho dos alunos explicitando ainda os resultados finais. A eficácia da metodologia de ensino proposta foi comprovada durante a aula notou-se significante contribuição deste software como recurso didático, além de possibilitar melhor interação entre aluno-aluno e professor-aluno na construção do conhecimento individual e coletivo. Assim, esperamos que o geoplano virtual não seja apenas mais um recurso para ser utilizado em sala de matemática, mas que contribua positivamente com o processo de ensino e aprendizagem de área e perímetro de figuras planas, minimizando dificuldades que venham surgir por parte dos alunos com relação a esse conteúdo. Apresentamos também alguns resultados e que estes possam contribuir para direcionar as práticas educacionais, tendo em vista que tal conteúdo ainda é mal compreendido pelos alunos.

Palavras-chave: Área. Perímetro. Recursos digitais. Geoplano virtual**.**

1. Introdução

O estudo das grandezas geométricas é de grande relevância para a formação do pensamento e para a vida. Com efeito, trata-se de um campo privilegiado de articulações com a geometria, a aritmética e a álgebra, além de possibilitar conexões com outras disciplinas. Porém, ainda se verifica que o processo de construção das grandezas geométricas, geralmente, é trabalhado de forma insatisfatória, causando ou intensificando nos alunos algumas dificuldades conceituais de aprendizagem.

A inquietação com as causas das dificuldades do ensino e aprendizagem das grandezas geométricas em todos os níveis de ensino tem sido objeto de estudos entre alguns pesquisadores como Bellemain e Lima (2002), Lorenzato (1995), Perrot *et a.l* (1998), dentre outros.Diante do quadro insatisfatório, a busca é constante em como proporcionar

ao educando o estudo dos conceitos geométricos e assim desenvolver capacidades psíquicas.

As evoluções socio-culturais e tecnológicas ocasionam mudanças na sociedade e no pensamento humano até chegar ao modo como identificamos nos dias atuais. Para compreender este processo, precisamos de autonomia, criatividade e autocrítica na triagem e no entendimento dessas informações, bem como na apropriação do conhecimento construído pela humanidade.

A necessidade de abordar certos conceitos matemáticos exige que nos debrucemos mais sobre o contexto social dos nossos alunos e sobre os recursos disponíveis da atualidade. Assim, as metodologias aplicadas à educação devem colaborar com os alunos, tendo em vista as necessidades do presente.

Buscamos diferentes materiais para desenvolver o trabalho de área e perímetro com alunos do ensino fundamental. Nos deparamos com o geoplano, uma tábua com pregos dispostos em malha quadrada ou isométrica. Também conhecemos o geoplano virtual online, que poderia ser facilmente utilizado no laboratório de informática da escola. Por sua forma e utilização o geoplano remete ao lúdico e possibilita o aluno a pesquisar, a experimentar, a conjecturar, e a desenvolver habilidades. Consideramos que esses aspectos poderiam ser relevantes no método de ensino das áreas planas de alguns polígonos. Para tanto, este trabalho levou-nos a desenvolver uma proposta que permitiu unir esses três elementos: tecnologia, conhecimento matemático e estudo sobre os conceitos de perímetro e área.

Neste trabalho foi realizada uma tarefa, com o auxílio do software geoplano virtual[15], como elemento mediador para o trabalho do conceito de área e perímetro de figuras planas, visando uma maneira de trabalhar a percepção e intuição dos educandos, e sobretudo, a relevância da interação entre aluno-aluno, aluno-professor e aluno-computador. Assim, nosso objetivo é de relatar uma experiência fruto de uma intervenção pedagógica, realizada em uma instituição pública de ensino situada no município de Vitória-ES. Essa ação teve por objetivo a utilização de recursos digitais para explorar o

[15] http://profjosecarlos.no.comunidades.net/geoplano-virtual.

conceito de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas, bem como sua integração no processo de ensino e aprendizagem por alunos do 7°ano do ensino fundamental.

Trazemos na sequência uma discussão teórica de autores que debatem questões relacionadas com as grandezas geométricas, na qual os conceitos de área e perímetro estão incluídos.

2. Fundamentação Teórica

A compreensão dos conteúdos relacionados a Grandezas e Medidas é fundamental para a atuação do aluno no mundo, pois estão presentes no cotidiano das pessoas. Lima e Bellemain (2010) afirmam que a criança lida com grandezas e medidas mesmo antes de chegar à escola por meio de comparações, medições ou estimativas de medida relativa a alguma grandeza.

A palavra área, por exemplo, é utilizada no cotidiano com diferentes sentidos, como: 'área de serviço'; 'vende-se essa área' e 'grande área' de um campo de futebol. Há expressões que favorecem o sentido da área na matemática escolar e outras que podem causar conflito com o significado matemático.

Lima e Bellemain (2010) consideram que o desempenho insatisfatório dos alunos nas questões de grandezas e medidas não diz respeito apenas a fatores ligados ao contexto educacional, mas também à complexidade dos conceitos envolvidos. Esses autores afirmam que é necessário valorizar as experiências de visualização e manipulação de objetos e atividades que envolvam imagens, mas defendem que essas ações não são suficientes. "Além delas, é imprescindível que, de forma simultânea e progressiva, os conceitos matemáticos associados aos objetos físicos e aos desenhos ou às imagens (às representações gráficas) sejam ensinados e aprendidos" (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p.171).

Uma das formas de promover diferentes experiências de aprendizagem matemática enriquecedoras é por meio do uso de materiais didáticos, os quais assumem um papel ainda mais determinante por força da característica abstrata da matemática. Com relação aos recursos didáticos o geoplano apresenta situações que abrangem consideravelmente o campo conceitual das grandezas perímetro e área, por trabalhar com as malhas. Além disso, o geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial,

comparação, relação, discriminação, sequência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e translação, perímetro, área (MACHADO, 2008). No caso do geoplano virtual ainda temos a questão da informática. Compreendemos que a disseminação da informática e sua utilização como ferramenta de ensino associado ao fato do geoplano pode contribuir para a formação de alguns conhecimentos matemáticos. Desse modo, o software Geoplano Virtual pode ter sua contribuição quando tratamos de um olhar lúdico, além de servir como estratégia diferenciada dos métodos tradicionais baseados em livros e cadernos.

Visando possibilitar tais aprendizagens a partir da utilização de mídias digitais no ensino, nos apoiamos no que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O desenvolvimento das tecnologias da informação permite que a aprendizagem ocorra em diferentes lugares e por diferentes meios. Portanto, cada vez mais as capacidades para criar, inovar, imaginar, questionar, encontrar soluções e tomar decisões com autonomia assumem importância. A escola tem um importante papel a desempenhar ao contribuir para formação de indivíduos ativos e agentes criadores de novas formas culturais (BRASIL, 1998, p.140).

Portanto, o Geoplano Digital condiz com a perspectiva de utilização do computador como ferramenta de ensino. Podendo permitir uma forma mais desprendida de aprender matemática, por meio da prática, discussão e descoberta de propriedades e conceitos em situações que permitam a investigação e a constante experimentação. O aluno constata o que ele já aprendeu e o que ele ainda precisa aprender. Nesta perspectiva, o geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas, constituindo-se em um suporte concreto para a representação mental, um recurso que leva à realidade ideias abstratas (LEIVAS, 2004).

Defendemos, porém que o mais importante é que o professor perceba como o sujeito aprende e pensa, para alcançar bons resultados. Essa preocupação esteve presente na nossa organização da ação, conforme indicamos na seção seguinte.

3. Metodologia

Para que pudéssemos alcançar nosso objetivo de apresentar uma proposta de trabalho que facilitasse o aprendizado do conceito das grandezas geométricas área e perímetro, realizamos uma tarefa junto aos 21 alunos do 7° ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública do município de Vitória/ES, no segundo semestre de 2017.

A tarefa foi composta de 3 exercícios e foi desenvolvida em 1 sessão de 1 hora e 40 minutos (o que corresponde a 2 tempos de aula). Durante a aplicação desta tarefa, ocorreram, em cada um dos exercícios momentos de discussão e reflexão, e em alguns casos, o professor fez a sistematização sobre o conteúdo abordado.

O material utilizado se compõe de ficha impressa, lápis e borracha, computador, software geoplano virtual, por acreditarmos que motivariam e permitiriam os alunos à construção de estratégias. O Geoplano Virtual utilizado está disponível no site *http://profjosecarlos.no.comunidades.net/geoplano-virtual*.

Antes de iniciar as ações, a turma foi organizada em 10 duplas e um aluno preferiu ficar sozinho, eles foram distribuídos num total de 11 computadores.

A princípio, a aula foi iniciada com a apresentação de um geoplano de madeira, borrachas (atilhos) coloridas e como ele funcionava. Neste momento, também foi retomado o conteúdo de grandezas e medidas, com ênfase ao perímetro e área.

Em seguida, ensinou-se aos alunos, como acessar o site que continha o geoplano virtual, e por alguns minutos os alunos foram orientados a explorar o software como quisessem, para poder familiarizar-se com o instrumento (fig. 1 e 2).

Figura 18: Fotos dos alunos sentados em dupla explorando o software.

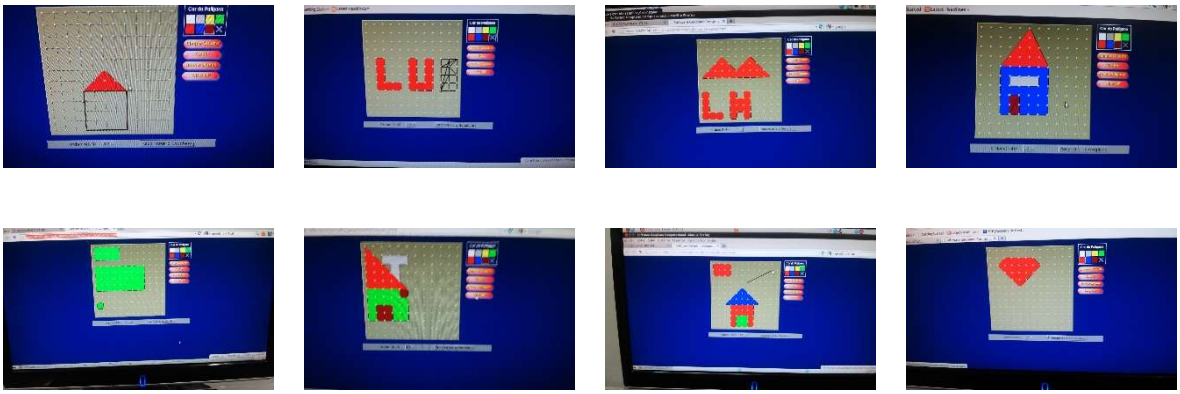
Fonte: Os autores.

Figura 2: Fotos das duplas interagindo com integrantes de outras duplas.

Fonte: Os autores.

Descobriram algumas ferramentas, seu funcionamento e construíram algumas figuras. Também observaram a possibilidade de pintar o interior das figuras com cores disponíveis no software. As imagens, a seguir (fig. 3), são fotos das figuras construídas por algumas duplas durante a exploração do software.

Figura 3: Ilustrações das imagens.



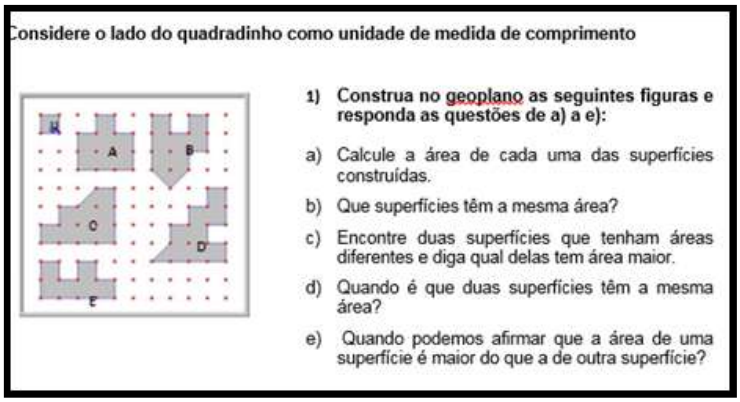
Fonte: Os autores.

Em seguida, foi explicado como realizar a tarefa proposta em material impresso e registrar as soluções dos exercícios. Passou-se então a aplicação da tarefa e seu desenvolvimento.

4. Aplicação da Atividade e Análise

O primeiro exercício (fig. 4) foi constituído de cinco itens e tem como objetivo geral a identificação de área como grandeza unidimensional por meio de comparação de figuras planas. O item (a) tem o objetivo de identificar áreas em figuras de diferentes formas por meio de contagem de unidades de medida de área. O item (b) a identificação de figuras que possuem formas diferentes com áreas iguais. O item (c), (d) e (e) comparação de áreas de figuras.

Figura 4: Ilustração do exercício 1.


Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento

1) **Construa no geoplano as seguintes figuras e responda as questões de a) a e):**

a) Calcule a área de cada uma das superfícies construídas.

b) Que superfícies têm a mesma área?

c) Encontre duas superfícies que tenham áreas diferentes e diga qual delas tem área maior.

d) Quando é que duas superfícies têm a mesma área?

e) Quando podemos afirmar que a área de uma superfície é maior do que a de outra superfície?

Fonte: Os Autores

Ao construírem as figuras sugeridas no item (a) para o geoplano virtual os alunos demonstraram reconhecer os elementos básicos de geometria plana: ponto, reta e segmento de reta; somente duas duplas demonstraram dificuldade, necessitando de ajuda de outros e mais tempo para realizar essa tarefa. Apesar de ser a primeira vez que os alunos manusearam este recurso, em geral, apresentaram facilidade para construir as figuras. Os alunos também não apresentaram dificuldades para responder os outros itens.

Ao analisar as respostas das 11 fichas, constatamos que houve um número de acertos bem significativo para o exercício 1. No entanto, evidenciamos em duas fichas que os alunos fizeram confusão entre perímetro e área.

A escolha do geoplano virtual permitiu por meio da contagem das superfícies delimitadas pelos quadradinhos destacados pela ferramenta *Grade*, a verificação da área das figuras. Essa técnica permitiu a observação de que existem figuras de mesma área com diferentes formas e figuras que possuem formas diferentes e mesma área.

Com o auxílio da ferramenta *Cor do Polígono* foi possível diferenciar contorno da superfície. Constatamos também que, durante a realização deste exercício, alguns alunos apresentaram dificuldades em identificar e calcular a área de alguns polígonos que apareciam o *meio quadradinho*, conforme explicita, a seguir, a transcrição do diálogo:

Aluno A: *Aqui é metade*

Aluno B: *Então coloca 1,2*

Aluno A: *Mas não é 1,2. É 1,5*

Aluno B: *Professora como escreve meio quadradinho?*

Aluno C: *É 0,5 né.*

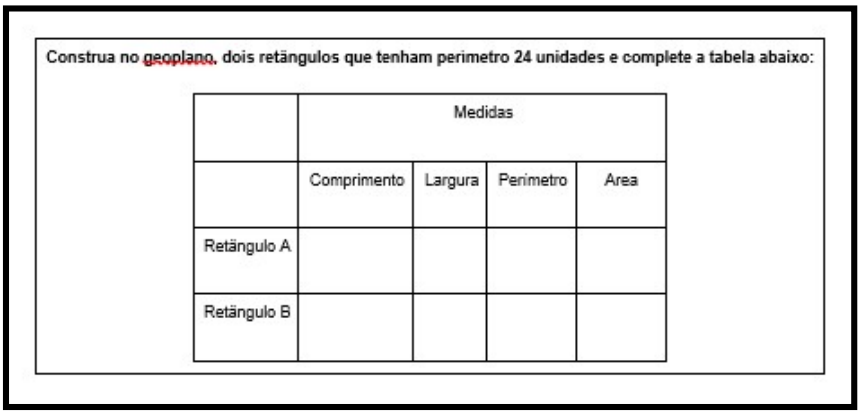
(Neste momento, estavam se referindo ao registro da metade de um quadradinho.)

Verificamos nas falas que alguns apresentavam dificuldade de representar números decimais. Porém, o ambiente que eles se encontravam deixou-os mais à vontade e às duplas interagiam. Assim, puderam tirar dúvidas entre eles ou com a professora conforme visto no diálogo anterior.

Também observamos nas fichas de resolução dos alunos, que alguns apresentaram bloqueio em concluir por escrito o que havia discutido em duplas, mas na argumentação oral e coletiva as interações são bem significativas quando relacionam a ideia de maior área a quantidade de quadradinho (área) do geoplano. Isso mostra que trabalhamos pouco a escrita de sistematização de ideias discutidas em aulas de matemática.

A sistematização da professora foi de considerável relevância para a compreensão dos alunos, tendo em vista que o conteúdo estudado é área e esta precisou ser registrada em u^2. Também vale ressaltar que uma ação desenvolvida em sala de aula contribuiu para a realização deste exercício, uma vez que os alunos já haviam experienciado a contagem ou a técnica de compensação com o uso da malha quadriculada.

Figura 5: Ilustração do exercício 2.



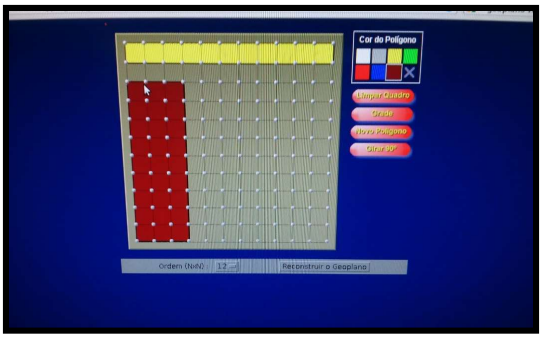
Construa no geoplano, dois retângulos que tenham perimetro 24 unidades e complete a tabela abaixo:

	Medidas			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Area
Retângulo A				
Retângulo B				

Fonte: Os autores.

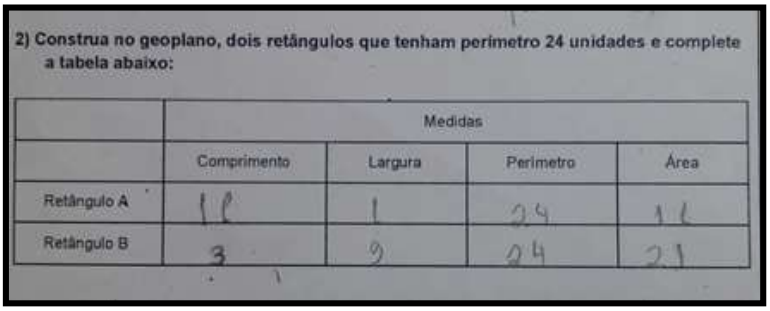
O exercício 2 (fig. 5) teve os objetivos de construir diferentes retângulos com mesmo perímetro e identificar as medidas e o valor da área. Com o uso do geoplano virtual, os alunos puderam construir retângulos de mesmo perímetro, determinaram o comprimento das dimensões e a medida de áreas de cada figura construída.

Figura 6: Foto de dois retângulos construídos por uma dupla de alunos com perímetro de 24 unidades.



Fonte: Os autores.

Figura 7: Foto da ficha de resolução dos alunos referente à figura 4 acima



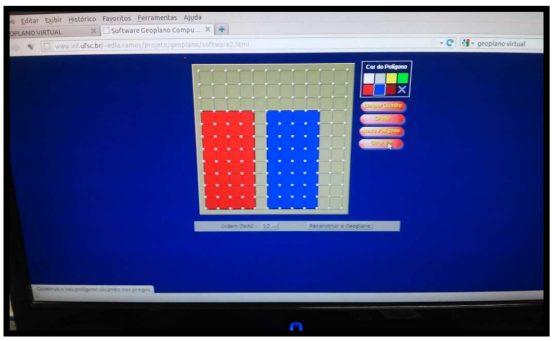
2) Construa no geoplano, dois retângulos que tenham perímetro 24 unidades e complete a tabela abaixo:

	Medidas			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A	12	1	24	12
Retângulo B	3	9	24	27

Fonte: Os autores.

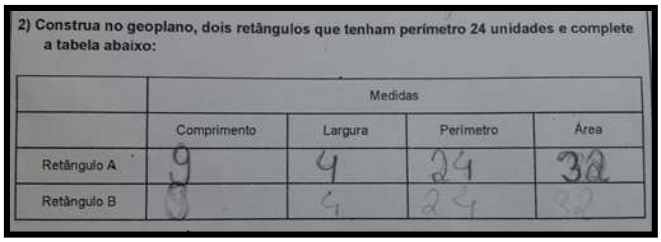
Esse exercício foi de difícil resolução para alguns alunos. Foram observados três obstáculos pelos alunos: O primeiro quanto a identificação da medida de área e perímetro quando algumas duplas ainda faziam confusão entre essas duas grandezas. O segundo, diz respeito a construção de mesmo retângulo em posição diferente, acreditando ser diferentes figuras, necessitando assim da intervenção da professora e a sistematização deste conteúdo.

Figura 8: Foto das imagens da resolução do exercício por uma dupla de alunos que se encaixou no obstáculo 2.



Fonte: Os autores.

Figura 9: Foto da ficha de resolução dos alunos referente à figura 6 acima.



2) Construa no geoplano, dois retângulos que tenham perímetro 24 unidades e complete a tabela abaixo:

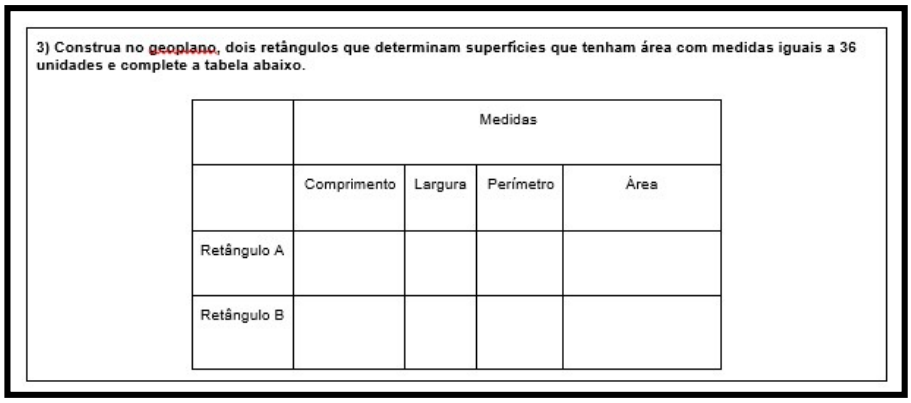
	Medidas			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A	9	4	24	32
Retângulo B	8	4	24	32

Fonte: Os autores.

A ferramenta *Girar 90°*, foi de grande aliada para mostrar que a mesma figura pode aparecer em diferentes posições, conforme verificamos nas figuras 8 e 9. Desmistificando assim a ideia de supor que são diferentes.

O terceiro e que mais gerou polêmica entre as duplas foi o fato de que para determinar o perímetro da figura, ao invés de contar os lados dos quadradinhos, estavam contando os pregos do geoplano, representados pelos pontos. Foi preciso intervir e discutir com os alunos sobre a diferença entre elementos básicos da geometria: linha, ponto, segmento e distância.

Figura 10: Ilustrações do exercício 3.



3) Construa no geoplano, dois retângulos que determinam superfícies que tenham área com medidas iguais a 36 unidades e complete a tabela abaixo.

	Medidas			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A				
Retângulo B				

Fonte: Os autores.

Esse exercício 3 (fig. 10) objetivou a construção de dois retângulos que tenha a mesma área. Essa atividade foi resolvida com mais rapidez, comparada ao exercício 2. Tal fato se deu por poderem contar a quantidade de quadradinhos antes de fazer a figura. Alguns alunos ainda utilizaram a técnica da multiplicação entre dois números para obterem um retângulo com o número de 36 quadradinhos.

5. Considerações Finais

Ao elaborar a atividade relatada, o objetivo era de proporcionar uma metodologia diferente, de modo que despertasse nos alunos o interesse e motivação para a discussão e apropriação dos conceitos de área e perímetro.

Dentre algumas ações realizadas com os alunos, consideramos esta experiência significativa. Pois por meio desta tarefa, os alunos tiveram a oportunidade de conhecer o software geoplano digital, desenvolver a atividade matemática, interagir com os colegas e professor e construir conhecimentos matemáticos de forma efetiva e divertida. E ao professor possibilitou criar situações de aprendizagem diferenciadas, não se prendendo a metodologias de ensino tradicional e meramente tecnicista. Além de identificar o que os alunos sabiam e o que ainda tinham dúvidas como a confusão entre área e perímetro ou o cálculo de medida de comprimento contando o número de pregos ao invés do número de lados.

Na escola onde foi realizada a atividade, os fatores que mais contribuíram para o sucesso na realização das propostas, foi: (1) o apoio do técnico permanente na escola, dando suporte a professora; e (2) à viabilidade do software no site, facilitando assim o acesso desse recurso.

Avaliamos essa experiência como positiva, pois notou-se uma boa receptividade e um grande envolvimento dos alunos. O que pensamos também ser fundamental para ocorrer a aprendizagem. Os resultados da tarefa demonstraram acréscimo de conhecimentos dos alunos com relação ao conteúdo abordado demonstrando que aulas realizadas no laboratório de informática com recursos digitais, quando é utilizada de forma consciente e intencional, sendo ampliada pela sistematização do conteúdo pela professora, pode ser um valioso aliado.

Nesta ação pedagógica, abordou-se apenas exercícios relacionados aos conceitos de perímetro e área. No entanto, a aplicabilidade deste software abrange outros conhecimentos matemáticos. O professor precisa estar atento a essas demandas que surgem ao longo do processo para intervir quando necessário.

6. Referências

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de Grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. 1. Ed. Natal: SBHMAT, 2002

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática-5ª a 8ª série.** Brasil, 1998.

LEIVAS, J. C. P. **Geoplano. Curso de aperfeiçoamento em Matemática da FURGS** - Fundação Universidade Federal do Rio Grande. Disponível em < http://mathematikos.mat.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf >.

LIMA P, F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e medidas. Secretaria de Educação Básica. **Coleção Explorando o Ensino. Matemática: Ensino Fundamental**. BRASIL, Ministério de Educação. Matemática, v.17. Brasília, 2010.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar geometria?** Educação Matemática em revista, n.°4, v. 4. São Paulo: SBEM, 1995.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

MELO NETO, J. A. de. **Tecnologia educacional: formação de professores no labirinto de ciberespaço**. Rio de Janeiro: MEMVABMEM, 2007.

PERROT, G. *et al*. **Módulos para o ensino-aprendizagem em geometria: relatório da primeira experimentação do primeiro módulo em Pernambuco**. In: Anais Seminário do Pró-Matemática, 5, 1998, Recife. Brasília: MEC/SEF, 1998.

7ª Semana da Matemática

Matemática, inclusão e tecnologia

16 a 19 de maio de 2018

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus Vitória

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-8263-369-4
9 788582 633694